УДК 517.958

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ СИУ 2D ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА МНОГОСЛОЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОТРАЖАЮЩИХ СТРУКТУРАХ

Часть I. Случай E-поляризации

Ю.В. Гандель, В.Д. Душкин

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
пл. Свободы 4, Харьков, 61077, Украина, e-mail: Yuriy.V.Gandel@univer.kharkov.ua
Академия ВВ МВС Украины,
пл. Восстания 3, Харьков, 61005, Украина, e-mail: Dushkin_@mail.ru

Аннотация. Задачи дифракции электромагнитных волн на многослойных отражающих структурах в 2D случае приводят к краевым задачам для уравнений Гельмгольца. В случае E-поляризации эти краевые задачи сведены к системам граничных сингулярных интегральных уравнений первого рода, для решения которых применяется вариант эффективного и строго обоснованного численного метода дискретных особенностей.

Ключевые слова: задачи дифракции, многослойные отражающие структуры, краевые задачи, сингулярные интегральные уравнения.

Сведение исходных краевых задач к системам сингулярных интегральных уравнений (СИУ) основывается на методе параметрических представлений сингулярных интегралов [1]-[3]. Этот метод позволил получить большое количество моделей разнообразных однослойных полупрозрачных структур [4]-[9]. В работе [10] рассматривалась модель многослойной полупрозрачной структуры. Однако модели многослойных отражающих структур, основанные на данном подходе, ранее не рассматривались.

Многослойные решётки, благодаря специальному подбору соотношений между размерами элементов структуры, позволяют получать поля с необходимыми физическими характеристиками. Поэтому построение математических моделей процессов рассеяния электромагнитных волн на многослойных структурах является актуальной задачей для исследователей.

Характерной особенностью систем СИУ данных задач является наличие нескольких неизвестных функций, каждая из которых связана с характеристикой поля на одном из слоёв. Каждое из СИУ зависит от двух неизвестных функций, и фактически представляет уравнение связи полей на двух соседних слоях.

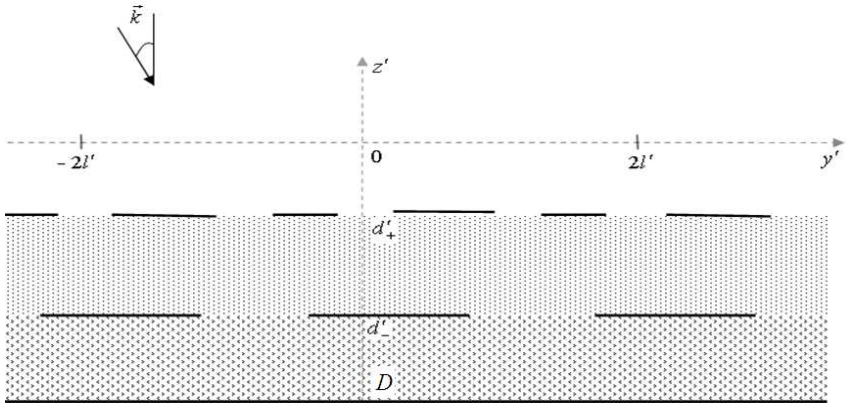


Рис. 1. Сечение дифракционной структуры плоскостью YOZ.

Рассмотрим следующую дифракционную структуру (см. рис. 1). В плоскости $z' = D$ лежит бесконечный экран, на котором расположены два слоя диэлектриков. Первый слой диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε_1, заполняет область $d'_- < z' < d'_+$, второй слой диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε_2, заполняет область $D < z' < d'_-$.

Над описанной структурой, в области $z' > d'_+$ – полупространство с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0 = 1$.

Между верхним и нижним слоями диэлектрика и на верхнем слое диэлектрика расположены $2l'$ -периодические системы, состоящие из бесконечно тонких идеально проводящих лент.

Пусть

$$\mathrm{L}^+ = \left\{ \mathrm{y}' \in \mathrm{R} |\ y' \in \bigcup_{\mathrm{q}=1}^{M^+} (a_q^+, b_q^+),\ 0 < a_1^+ < b_1^+ < \ldots < a_q^+ < b_q^+ \ldots < a_{M^+}^+ < b_{M^+}^+ < 2l' \right\} \tag{1}$$

– координаты точек y' плоскости $z = d'_+$, лежащих на отрезке $y' \in [0, 2l']$ и свободных от лент.

Пусть также

$$\mathrm{L}^- = \left\{ \mathrm{y}' \in \mathrm{R} |\ y' \in \bigcup_{\mathrm{p}=1}^{M^-} (a_p^-, b_p^-),\ 0 < a_1^- < b_1^- < \ldots < a_p^- < b_p^- \ldots < a_{M^-}^- < b_{M^-}^- < 2l' \right\} \tag{2}$$

– координаты y' точек плоскости $z = d'_-$, лежащих на отрезке $y' \in [0, 2l']$ и также свободных от лент.

Вообще говоря, $a_q^+ \neq a_s^-$ и $b_q^+ \neq b_s^-$, если $q = s$.

Введём обозначения для областей:

$$\Omega_0 = \left\{(y', z') \in R^2 \mid z' > d'_+,\ 0 < y' < 2l'\right\}, \tag{3}$$
$$\Omega_1 = \left\{(y', z') \in R^2 \mid d'_- < z' < d'_+,\ 0 < y' < 2l'\right\}, \tag{4}$$
$$\Omega_2 = \left\{(y', z') \in R^2 \mid D' < z' < d'_-,\ 0 < y' < 2l'\right\}. \tag{5}$$

Рассматривается стационарная задача, в которой зависимость поля от времени задаётся множителем $e^{-i\omega t}$.

Пусть из бесконечности сверху на дифракционную структуру наклонно падает E-поляризованная плоская электромагнитная волна единичной амплитуды:

$$U(y', z') = E_x(y', z') = \exp\left(ik\left(y' \cdot \sin\varphi - \left(z' - d'_+\right) \cdot \cos\varphi\right)\right). \tag{6}$$

Необходимо найти полное поле $u(y', z')$, возникшее в результате рассеяния волны рассматриваемой дифракционной структуре. Оно удовлетворяет в областях Ω_i, $(i = 0, 1, 2)$, уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2\sqrt{\varepsilon_i} \cdot u = 0, \quad (y', z') \in \Omega_i, \quad (i = 0, 1, 2), \quad k = \frac{\omega}{c}, \tag{7}$$

условию Майкснера на ребре; разность полного и падающего полей удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда:

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r} \cdot \left(\frac{\partial\,(u - U)}{\partial r} - ik \cdot (u - U)\right) = 0, \quad r = \sqrt{(y')^2 + (z')^2}. \tag{8}$$

Введём в рассмотрение функцию $u_0(y', z')$ – решение в области Ω_0 вспомогательной краевой задачи дифракции плоской монохроматической волны $U(y', z')$, определённой формулой (6), на бесконечном плоском идеально проводящем экране, лежащем в плоскости $z' = d'_+$. Функция $u_0(y', z')$ на поверхности экрана удовлетворяет граничному условию:

$$u_0(y', d'_+) = 0, \quad y' \in R. \tag{9}$$

Поле $u_0(y', z')$ имеет представление:

$$u_0(y', z') = \exp\left(ik\left(y' \cdot \sin\varphi - \left(z' - d'_+\right) \cdot \cos\varphi\right)\right) - \exp\left(ik\left(y' \cdot \sin\varphi + \left(z' - d'_+\right) \cdot \cos\varphi\right)\right) \tag{10}$$

причём

$$\frac{\partial u_0}{\partial z'}(y', d'_+) = -2ik \cdot \sin\varphi \cdot \exp\left(iky' \cdot \sin\varphi\right). \tag{11}$$

Полное поле $u(y', z')$, возникшее в результате дифракции волны на решётках $u(y', z')$, будем искать в виде:

$$u(y', z') = \begin{cases} u_0(y', z') + u^+(y', z'), & (y', z') \in \Omega_0; \\ u_1(y', z'), & (y', z') \in \Omega_1; \\ u_2(y', z'), & (y', z') \in \Omega_2. \end{cases} \tag{12}$$

Поле $u^+(y', z')$ в области Ω^+ ищем в виде:

$$u^+(y', z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^+ \cdot e^{-\gamma'_{0,n}\left(z'-d'_+\right)} \cdot e^{i\cdot p'_n y'}, \tag{13}$$

где

$$p'_n = k \cdot \sin\varphi + \frac{\pi n}{l}, \quad \gamma'_{0,n} = \sqrt{\left(p'_n\right)^2 - k^2}, \quad n \in Z. \tag{14}$$

Условия излучения Зоммерфельда будут выполнены, если ветвь радикала выбрать так, чтобы $\mathrm{Re}\left(\gamma'_{0,n}\right) \geqslant 0, \quad \mathrm{Im}\left(\gamma'_{0,n}\right) \leqslant 0, \quad n \in Z.$

Пусть $\vartheta_i \quad i = 1, 2$ – угол между волновым вектором в области Ω_i, заполненной диэлектриком и вектором противоположным оси OZ. В силу закона Снеллиуса справедливы равенства:

$$k \cdot \sin\varphi = k\sqrt{\varepsilon_1} \cdot \sin\vartheta_1 = k\sqrt{\varepsilon_2} \cdot \sin\vartheta_2. \tag{15}$$

Учитывая соотношение (15) поле $u_1(y', z')$ в области Ω_1 ищем в виде:

$$u_1(y', z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(b_n^+ \cdot \frac{\mathrm{sh}\left(\gamma'_{1,n}\left(z' - d'_-\right)\right)}{\mathrm{sh}\left(\gamma'_{1,n}\left(d'_+ - d'_-\right)\right)} + b_n^- \cdot \frac{\mathrm{sh}\left(\gamma'_{1,n}\left(z' - d'_+\right)\right)}{\mathrm{sh}\left(\gamma'_{1,n}\left(d'_+ - d'_-\right)\right)} \right) \cdot e^{i\cdot p'_n y'}, \tag{16}$$

где

$$\gamma'_{1,n} = \sqrt{\left(p'_n\right)^2 - k^2 \cdot \varepsilon_1}, \quad n \in Z. \tag{17}$$

Поле $u_2(y', z')$ в области Ω_2 ищем в виде:

$$u_2(y', z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^- \cdot \frac{\mathrm{sh}\left(\gamma'_{2,n}\left(z' - D'\right)\right)}{\mathrm{sh}\left(\gamma'_{2,n}\left(d'_- - D'\right)\right)} \cdot e^{i\cdot p'_n y'}. \tag{18}$$

где

$$\gamma'_{2,n} = \sqrt{\left(p'_n\right)^2 - k^2 \cdot \varepsilon_2}, \quad n \in Z. \tag{19}$$

Введём безразмерные координаты и параметры:

$$\partial\ell = \frac{l'k}{\pi} = \frac{2l'}{\lambda}, \qquad y = \frac{\pi}{l'}y', \qquad z = \frac{\pi}{l'}z', \qquad d'_\pm = \frac{\pi}{l'}d'_\pm; \tag{20}$$

$$\alpha_q^+ = \frac{\pi}{l'}a_q^+, \qquad \beta_q^+ = \frac{\pi}{l'}b_q^+, \qquad q = 1, \ldots, M^+; \tag{21}$$

$$\alpha_s^- = \frac{\pi}{l'}a_s^-, \qquad \beta_s^- = \frac{\pi}{l'}b_s^-, \qquad s = 1, \ldots, M^-; \tag{22}$$

$$p_n = \frac{l \cdot p'_n}{\pi} = \partial\ell \cdot \sin\varphi + n, \qquad n \in Z; \tag{23}$$

$$\gamma_{0,n} = \sqrt{\left(p_n\right)^2 - \partial\ell^2}, \qquad \gamma_{i,n} = \sqrt{\left(p_n\right)^2 - \partial\ell^2 \cdot \varepsilon_i}, \quad i = 1, 2, \quad n \in Z; \tag{24}$$

$$\mathrm{L}^+ = \left\{ \mathrm{y} |\ y \in \bigcup_{\mathrm{q}=1}^{M^+} (\alpha_q^+, \beta_q^+), \quad 0 < \alpha_1^+ < \beta_1^+ < \ldots < \alpha_q^+ < \beta_q^+ < \ldots < \alpha_{M^+}^+ < \beta_{M^+}^+ < 2\pi \right\}, \tag{25}$$

$$\mathrm{L}^- = \left\{ \mathrm{y} |\ y \in \bigcup_{\mathrm{q}=1}^{M^-} (\alpha_q^-, \beta_q^-), \quad 0 < \alpha_1^- < \beta_1^- < \ldots < \alpha_s^- < \beta_s^- < \ldots < \alpha_{M^-}^- < \beta_{M^-}^- < 2\pi \right\}. \tag{26}$$

Из граничного условия обращения полного поля на поверхности идеально проводящей структуры в ноль следуют равенства:

$$u^+(y, d_+) = u_1(y, d_+) = 0, \qquad y \in CL^+ = [0, 2\pi] / L^+; \tag{27}$$

$$u_1(y, d_-) = u_2(y, d_-) = 0, \qquad y \in CL^- = [0, 2\pi] / L^-. \tag{28}$$

Из условий связи полей на границе раздела двух сред в "щелях" между ленточными структурами получаем равенства

$$u^+(y, d_+) = u_1(y, d_+), \qquad y \in L^+; \tag{29}$$

$$u_1(y, d_-) = u_2(y, d_-), \qquad y \in L^-; \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial z}(y, d_+) + \frac{\partial u^+}{\partial z}(y, d_+) = \frac{\partial u_1}{\partial z}(y, d_+), \qquad y \in L^+; \tag{32}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}(y, d_-) = \frac{\partial u_2}{\partial z}(y, d_-), \qquad y \in L^-. \tag{33}$$

Из представлений полей (13), (16), (18), граничных условий (27), (28), условий связи полей на границе раздела двух сред (29) — (33) получаем следующие соотношения для коэффициентов a_n^+, a_n^-, b_n^+, b_n^-:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^+ \exp(ip_n y) = 0, \quad y \in CL^+; \tag{34}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^+ \exp(ip_n y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^+ \exp(ip_n y), \quad y \in L^+; \tag{35}$$

$$-2i\partial\ell \cdot \sin\varphi \cdot e^{i\partial\ell \sin\varphi \cdot y} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^+ \cdot W_{0,n} \exp(ip_n y) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(b_n^+ \cdot W_{1,n} + \frac{b_n^- \cdot \gamma_{1,n}}{\mathrm{sh}(\gamma_{1,n}(d_+ - d_-))} \right) \cdot \exp(ip_n y), \quad y \in L^+; \tag{36}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^- \exp(ip_n y) = 0, \quad y \in CL^- ; \tag{37}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^- \exp(ip_n y) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^- \exp(ip_n y), \quad y \in L^- ; \tag{38}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^- \cdot W_{2,n} \exp(ip_n y) =$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(b_n^- \cdot W_{1,n} + \frac{b_n^+ \cdot \gamma_{1,n}}{sh(\gamma_{1,n}(d_+ - d_-))} \right) \cdot \exp(ip_n y), \quad y \in L^- ; \tag{39}$$

где

$$W_{0,n} = \gamma_{0,n}, \quad W_{1,n} = \gamma_{1,n} \cdot \mathrm{cth}(\gamma_{1,n}(d_+ - d_-)), \quad W_{2,n} = \gamma_{2,n} \cdot \mathrm{cth}(\gamma_{2,n}(d_- - D)), \quad n \in Z . \tag{40}$$

Из равенств (32), (33), (35), (36) следует, что:

$$a_n^+ = b_n^+, \quad a_n^- = -b_n^-, \quad n \in Z . \tag{41}$$

Из представлений

$$W_{0,n} = |n| \sqrt{1 + \frac{2\partial\ell \sin\varphi}{n} - \frac{\partial\ell^2 \cdot \cos^2\varphi}{n^2}}, \quad n \neq 0; \tag{42}$$

$$W_{1,n} = \mathrm{cth}(\gamma_{1,n}(d_+ - d_-)) \cdot |n| \sqrt{1 + \frac{2\partial\ell \sin\varphi}{n} + \frac{\partial\ell^2 \cdot (\sin^2\varphi - \varepsilon_1)}{n^2}}, \quad n \neq 0 ; \tag{43}$$

$$W_{2,n} = \mathrm{cth}(\gamma_{2,n}(d_- - D)) \cdot |n| \sqrt{1 + \frac{2\partial\ell \sin\varphi}{n} + \frac{\partial\ell^2 \cdot (\sin^2\varphi - \varepsilon_2)}{n^2}}, \quad n \neq 0 \tag{44}$$

получаем асимптотические равенства:

$$W_{0,n} = |n| + \partial\ell \sin\varphi \cdot \frac{|n|}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty ; \tag{45}$$

$$W_{i,n} = |n| + \partial\ell \sin\varphi \cdot \frac{|n|}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty , \quad i = 1, 2 . \tag{46}$$

Введём в рассмотрение функции:

$$F^+(y) = \frac{\partial u^+}{\partial y}(y, d_+) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} ip_n \cdot a_n^+ \exp(ip_n y) , \tag{47}$$

$$F^-(y) = \frac{\partial u^-}{\partial y}(y, d_-) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} ip_n \cdot a_n^- \exp(ip_n y) . \tag{48}$$

В силу граничных условий (27), (28), функции $F^+(t)$ и $F^-(t)$ обладают свойствами:

$$\int_{\alpha_q^+}^{\beta_q^+} F^+(t)\,dt = 0, \quad \left(q = 1, \ldots, M^+\right), \tag{49}$$

$$\int_{\alpha_s^-}^{\beta_s^-} F^-(t)\,dt = 0, \quad \left(s = 1, \ldots, M^-\right), \tag{50}$$

$$F^+(y) = 0, \quad y \in CL^+, \quad F^-(y) = 0, \quad y \in CL^-. \tag{51}$$

Из определений (47), (48) функций $F^+(t)$ и $F^-(t)$ и соотношений (49) – (51), для коэффициентов a_n^+, a_n^-, b_n^+, b_n^- получаем интегральные представления:

$$a_n^+ = b_n^+ = \frac{1}{2\pi i p_n}\int_{L^+} F^+(t)\exp\left(-ip_n t\right)\,dt, \quad n \in Z; \tag{52}$$

$$a_n^- = -b_n^- = \frac{1}{2\pi i p_n}\int_{L^-} F^-(t)\exp\left(-ip_n t\right)\,dt, \quad n \in Z. \tag{53}$$

Используя свойства (49) – (51), получаем следующие представление для коэффициентов a_0^+ и a_0^-:

$$a_0^+ = \frac{1}{2\pi}\int_{L^+} F^+(t)\frac{\exp\left(-ip_0 t\right) - 1}{ip_0}\,dt, \tag{54}$$

$$a_0^- = \frac{1}{2\pi}\int_{L^-} F^-(t)\frac{\exp\left(-ip_0 t\right) - 1}{ip_0}\,dt. \tag{55}$$

Производя преобразования, аналогичные тем, которые были проведены в работах [6] – [9], получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^+}{\partial z}(y, d_+) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^+ \cdot W_{0,n}\exp\left(ip_n y\right) = -\Bigg[-\frac{1}{2\pi}\int_{L^+} e^{i\partial\ell\sin\varphi(y-t)}\mathrm{ctg}\left(\frac{t-y}{2}\right) F^+(t)\,dt + \\ + \frac{1}{\pi}\int_{L^+}\frac{W_{0,0}\cdot\left(\exp\left(ip_0\left(y-t\right)\right) - 1\right)}{2ip_0}F^+(t)dt + \\ + \frac{1}{\pi}\int_{L^+}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\Delta_{0,n}}{2ip_n}\exp\left(ip_n\left(y-t\right)\right) F^+(t)\,dt\Bigg],\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2}{\partial z}(y, d_-) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^- \cdot W_{2,n}\exp\left(ip_n y\right) = -\frac{1}{2\pi}\int_{L^-} e^{i\partial\ell\sin\varphi(y-t)}\mathrm{ctg}\left(\frac{t-y}{2}\right) F^-(t)\,dt + \\ + \frac{1}{\pi}\int_{L^-}\frac{W_{2,0}\cdot\left(\exp\left(ip_0\left(y-t\right)\right) - 1\right)}{2ip_0}F^-(t)dt + \\ + \frac{1}{\pi}\int_{L^-}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\Delta_{2,n}}{2ip_n}\exp\left(ip_n\left(y-t\right)\right) F^-(t)\,dt,\end{aligned} \tag{57}$$

где

$$\Delta_{0.n} = W_{0,n} - |n| - \partial\ell \sin\varphi \cdot \frac{|n|}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty. \tag{58}$$

$$\Delta_{2.n} = W_{2,n} - |n| - \partial\ell \sin\varphi \cdot \frac{|n|}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty\,. \tag{59}$$

Действуя аналогично, для функций $\frac{\partial u_1}{\partial z}(y, d_+)$ и $\frac{\partial u_1}{\partial z}(y, d_-)$ находим следующие интегральные представления:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial z}(y, d_+) = &-\frac{1}{2\pi}\int_{L^+} e^{i\partial\ell\sin\varphi(y-t)}\mathrm{ctg}\left(\frac{t-y}{2}\right) F^+(t)\,dt + \\ &+\frac{1}{\pi}\int_{L^+}\frac{W_{1,0}\cdot(\exp(ip_0 y)-1)}{2ip_0}F^+(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{L^+}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\Delta_{1,n}}{2ip_n}\exp(ip_n(y-t))\,F^+(t)\,dt + \\ &+\frac{1}{\pi}\int_{L^-}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\gamma_{1,n}\cdot\exp(ip_n(y-t))}{2ip_n\cdot\mathrm{sh}(\gamma_{1,n}(d_+-d_-))}F^-(t)\,dt\,,\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial z}(y, d_-) = -\Bigg[&-\frac{1}{2\pi}\int_{L^-} e^{i\partial\ell\sin\varphi(y-t)}\mathrm{ctg}\left(\frac{t-y}{2}\right) F^-(t)\,dt + \\ &+\frac{1}{\pi}\int_{L}\frac{W_{1,0}\cdot(\exp(ip_0 y)-1)}{2ip_0}F^-(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{L^-}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\Delta_{1,n}}{2ip_n}\exp(ip_n(y-t))\,F^-(t)\,dt + \\ &+\frac{1}{\pi}\int_{L^-}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\gamma_{1,n}\cdot\exp(ip_n(y-t))}{2ip_n\cdot\mathrm{sh}(\gamma_{1,n}(d_+-d_-))}F^+(t)\,dt\Bigg]\,,\end{aligned} \tag{61}$$

где

$$\Delta_{1,n} = W_{1,n} - |n| - \partial\ell\sin\varphi\cdot\frac{|n|}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty\,. \tag{62}$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned}K_1(y,t) = &\left(\frac{e^{i\partial\ell\sin\varphi(y-t)}}{2}\mathrm{ctg}\left(\frac{t-y}{2}\right) - \frac{1}{t-y}\right) - \\ &-\frac{(W_{0,0}+W_{1,0})\cdot(\exp(ip_0(y-t))-1)}{4ip_0} - \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(\Delta_{0,n}+\Delta_{1,n})}{4ip_n}\exp(ip_n(y-t))\,,\end{aligned} \tag{63}$$

$$K_2(y,t) = -\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\gamma_{1,n}\cdot\exp(ip_n(y-t))}{2ip_n\cdot\mathrm{sh}(\gamma_{1,n}(d_+-d_-))}\exp(ip_n(y-t))\,. \tag{64}$$

$$K_3(y,t) = \left(\frac{e^{i\partial\ell\sin\varphi(y-t)}}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{t-y}{2}\right) - \frac{1}{t-y}\right) -$$
$$- \frac{\left(W_{2,0}+W_{0,1}\right)\cdot\left(\exp\left(ip_0\left(y-t\right)\right)-1\right)}{4ip_0} - \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\left(\Delta_{2,n}+\Delta_{1,n}\right)}{4ip_n}\exp\left(ip_n\left(y-t\right)\right). \quad (65)$$

Подставляя в условия сопряжения (36), (39) интегральные представления полей (56), (57), (60), (61) получаем систему сингулярных интегральных уравнений первого рода:

$$\frac{1}{\pi}\int_{L^+}\frac{1}{t-y}F^+(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{L^+}K_1(y,t)\;F^+(t)\,dt +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{L^-}K_2(y,t)\,F^-(t)\,dt = i\partial\ell\sin\varphi\cdot e^{i\partial\ell\sin\varphi\cdot y}, \quad y\in L^+, \quad (66)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{L^-}\frac{1}{t-y}F^-(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{L^-}K_3(y,t)\;F^-(t)\,dt +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{L^+}K_2(y,t)\,F^+(t)\,dt = 0, \quad y\in L^-; \quad (67)$$

решения которой удовлетворяют дополнительным условиям (49) — (50).

В силу условий Майкснера на ребре,

$$F^+(y) = O\left(r_1^{-1/2}\right), \qquad r_1\to 0, \quad (68)$$
$$F^-(y) = O\left(r_2^{-1/2}\right), \qquad r_2\to 0, \quad (69)$$

где

$$r_1 = \min_{q=1,\ldots,M^+}\left(\left|y-\alpha_q^+\right|,\left|y-\beta_q^+\right|\right), \quad (70)$$
$$r_2 = \min_{s=1,\ldots,M^-}\left(\left|y-\alpha_s^-\right|,\left|y-\beta_s^-\right|\right). \quad (71)$$

Условия Майкснера будут выполнены, если мы будем искать сужение функции $F^+(y)$ на интервалы $\left(\alpha_q^+,\beta_q^+\right)$ и функции $F^-(y)$ на интервалы $\left(\alpha_p^-,\beta_p^-\right)$ в виде:

$$F^+(y) = \frac{v_q^+(y)}{\sqrt{\left(y-\alpha_q^+\right)\left(\beta_q^+-y\right)}}, \qquad y\in\left(\alpha_q^+,\beta_q^+\right), \quad \left(q=1,\ldots,M^+\right), \quad (72)$$
$$F^-(y) = \frac{v_p^-(y)}{\sqrt{\left(y-\alpha_p^-\right)\left(\beta_p^--y\right)}}, \qquad y\in\left(\alpha_p^-,\beta_p^-\right), \quad \left(p=1,\ldots,M^-\right), \quad (73)$$

где

$$v_q^+(y)\in C\left[\alpha_q^+,\beta_q^+\right], \quad \left(q=1,\ldots,M^+\right), \quad v_p^-(y)\in C\left[\alpha_p^-,\beta_p^-\right], \quad \left(p=1,\ldots,M^-\right). \quad (74)$$

Введем отображения:

$$g_q^+ : [-1,1] \to \left[\alpha_q^+, \beta_q^+\right], \quad g_q^+(t) = \frac{\beta_q^+ - \alpha_q^+}{2}\tau + \frac{\beta_q^+ + \alpha_q^+}{2}, \quad \left(q = 1, \ldots, M^+\right). \tag{75}$$

$$g_p^- : [-1,1] \to \left[\alpha_p^-, \beta_p^-\right], \quad g_q^-(t) = \frac{\beta_p^- - \alpha_p^-}{2}\tau + \frac{\beta_p^- + \alpha_p^-}{2}, \quad \left(p = 1, \ldots, M^-\right). \tag{76}$$

и обозначения

$$R_{1,q,m}^+(\xi,\tau) = K_1\left(g_q^+(\xi), g_m^+(\tau)\right) + (1-\delta_{q,m}) \cdot \frac{1}{g_q^+(\tau) - g_q^+(\xi)},$$
$$\left(q = 1, \ldots, M^+, \quad m = 1, \ldots, M^+\right); \tag{77}$$

$$R_{2,q,s}^+(\xi,\tau) = K_2\left(g_q^+(\xi), g_s^-(\tau)\right),$$
$$\left(q = 1, \ldots, M^+, \quad s = 1, \ldots, M^-\right); \tag{78}$$

$$R_{2,p,n}^-(\xi,\tau) = K_2\left(g_p^-(\xi), g_n^+(\tau)\right),$$
$$\left(p = 1, \ldots, M^-, \quad n = 1, \ldots, M^+\right); \tag{79}$$

$$R_{3,p,l}^-(\xi,\tau) = K_3\left(g_p^-(\xi), g_l^-(\tau)\right) + (1-\delta_{p,l}) \cdot \frac{1}{g_p^-(\tau) - g_p^-(\xi)},$$
$$\left(p = 1, \ldots, M^-, \quad l = 1, \ldots, M^-\right); \tag{80}$$

$$V_q^+(\tau) = v_q^+\left(g_q^+(\tau)\right), \qquad \left(q = 1, \ldots, M^+\right); \tag{81}$$

$$V_p^-(\tau) = v_p^-\left(g_p^-(\tau)\right), \qquad \left(p = 1, \ldots, M^-\right). \tag{82}$$

Учитывая (72) – (76), производя замену переменных в соответствии с (75) – (76), переходим от СИУ (66) – (67) на системе отрезков L к системе СИУ на стандартном интервале $(-1,1)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{g_q^+(\tau) - g_q^+(\xi)} \frac{V_q^+(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M^+}\int_{-1}^{1} R_{1,q,m}^+(\xi,\tau)\frac{V_m^+(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{M^-}\int_{-1}^{1} R_{2,q,s}^+(\xi,\tau)\frac{V_s^-(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = i\partial\ell \cdot \sin\varphi \cdot e^{i\partial\ell\sin\varphi \cdot g_q^+(\xi)},$$

$$|\xi| \leqslant 1, \quad \left(q = 1, \ldots, M^+\right); \tag{83}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{g_p^-(\tau)-g_p^-(\xi)}\frac{V_p^-(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{M^-}\int_{-1}^{1}R_{1,p,l}^-(\xi,\tau)\frac{V_l^-(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{M^+}\int_{-1}^{1}R_{2,p,n}^-(\xi,\tau)\frac{V_n^+(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0$$

$$|\xi|\leqslant 1,\quad \left(p=1,\ldots,M^-\right)\ ; \tag{84}$$

решения которой удовлетворяют дополнительным условиям:

$$\int_{-1}^{1}\frac{V_q^+(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0,\qquad \left(q=1,\ldots,M^+\right)\ ; \tag{85}$$
$$\int_{-1}^{1}\frac{V_p^-(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0,\qquad \left(p=1,\ldots,M^-\right)\ . \tag{86}$$

Таким образом, построена математическая модель рассматриваемой задачи теории дифракции на основе системы граничных сингулярных интегральных уравнений. Дискретная математическая модель задачи и алгоритм численного решения системы уравнений (83) – (86) основываются на методе дискретных особенностей [11].

Литература

1. Гандель Ю.В. Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований и краевые задачи математической физики // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: институт математики НАН Украины, 1995. – С.65-66.

2. Gandel Yu.V. Parametric Representations of Singular Integral Transforms in Boundary Value Problems of the Diffraction // International Conference Boundary Value Problems, Special functional and Fractional Calculus. – placeCityMinsk, 1996. – P.131.

3. Гандель Ю.В. Параметрические представления сингулярных интегральных операторов и математическое моделирование в задачах электродинамики // Труды VII Международного симпозиума МДОЗМФ'97. – Феодосия, 1997. – С.176-178.

4. Гандель Ю.В. О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики // Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Вып. 38. – Харьков: Вища школа, 1982. – С.15-18.

5. Гандель Ю.В. Забуга Т.А. Численный метод дискретных особенностей в задачах дифракции волн на решётках // Харьков, 1983. Рукопись представлена Харьк. ун-том. Деп. в УкрНИИНТИ 21 ноября 1983, № 1286Ук-Д83. – 37 с.

6. Гандель Ю.В. Душкин В.Д. Численное решение сингулярного уравнения задач дифракции электромагнитных волн на решётке // Харьков. ун-т, Харьков, 1993. – 20 с. Деп. в УкрИНТЭИ № 208-УК93, 18.02.93.

7. Гандель Ю.В. Парные сумматорные и сингулярные интегральные уравнения в задачах дифракции: теория и численные методы / Ю.В. Гандель // Автореферат дисс. доктора физ.-мат. наук, Харьков, 1994, 31 с.

8. Гандель Ю.В. Душкин В.Д. Фельдман М.Б. Численный анализ дифракции электромагнитных волн на периодических многоэлементных решётках, состоящих из прямоугольных брусьев // Харьков, 1994. – 21с. Рукопись представлена Харьк. ун-том. Деп. в ГНТБ Украины 5.12.94. № 2290-Ук94.

9. Гандель Ю.В. Душкін В.Д. Сингулярні інтегральні рівняння двовимірних задач дифракції електромагнітних хвиль // Інтегральні перетворення, Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т математики НАН України, вип. 13, 1996. – С.14-24.

10. Гандель Ю.В. Мищенко В.О. Псевдодифференциальные уравнения электромагнитной дифракции на плоскопараллельной структуре и их дискретная модель // Вісник Харк. нац. ун-ту. Серія "Математичне моделювання, Информаційні технології. Автоматизовані системи управління". – 2006. – вып. 6. – №733. – С.58-75.

11. Gandel' Yu. V., Lifanov placeI. K., Polyanskaya. T. S. On the Justification of the Method of Discrete Singularities for Two-Dimensional Diffraction Problems // Differential Equations. – 1995. – 31;9. – P.1491-1497.

MATHEMATICAL MODELS BASED ON SIE 2D DIFFRACTION PROBLEMS ON PERIODIC MULTILAYER REFLECTIVE STRUCTURES
Part I. The case of E-polarization.

Yu.V. Gandel, V.D. Dushkin

V.N. Karazin Kharkiv National University,
Svobody Sq., 4, Kharkov, 61077 Ukraine, e-mail: Yuriy.V.Gandel@univer.kharkov.ua
Academy IF of MIA of Ukraine,
Povstanya Sq., 3, Kharkov, 61005, Ukraine, e-mail: Dushkin_@mail.ru

Abstract. 2D problems of electromagnetic wave diffraction on multilayer reflecting structures lead us to boundary-value problems for the Helmholtz equation. In the case of E-polarization, these boundary problems are reduced to systems of boundary singular integral equations of the first kind. The numerical solution of these equations is based on the variant of efficient and roughly proved method of discrete singularities.

Keywords: Diffraction problems, multilayer reflecting structures, boundary-value problems, singular integral equations.

УДК 511.35

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ С РАЗНОСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

С.А. Гриценко, М.В. Шевцова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия,
e-mail: gritsenko@bsu.edu.ru, shevtsova@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается задача получения асимптотической формулы для числа простых чисел, не превосходящих X и лежащих в арифметической прогрессии с разностью $D = p_0^n$, где $p_0 \geq 3$ – фиксированное простое число и $D \leq X^{3/8} e^{-(\ln\ln X)^2}$.

Ключевые слова: распределение простых чисел, арифметическая прогрессия, схема решения тернарной задачи, оценка сумм характеров по простым числам.

Введение

В теории чисел важную роль играет распределение простых чисел в арифметических прогрессиях.

Пусть $\pi(x, D, l)$ означает число простых чисел, не превосходящих x и сравнимых с l по модулю D. При $D \leq (\ln x)^A$, где $A > 0$ – сколь угодно большое число, справедлива формула:

$$\pi(x, D, l) = \frac{Li(x)}{\varphi(D)} + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right) ,$$

которая известна в литературе как формула Зигеля-Вальфлиша [1].

Но для разности $D = p_0^n$ с фиксированным $p_0 \geq 3$ простым числом можно улучшить этот результат. В 1955 году А.Г. Постникову [2] удалось свести оценки сумм характеров по модулю, равному степени нечетного простого числа, к оценкам сумм Вейля специального вида, которые допускают нетривиальные оценки даже в тех случаях, когда их длины очень малы.

Эти соображения использовали ряд авторов для решения некоторых проблем теории чисел, к которым в общем случае не было никаких подходов.

Ю.В. Линник, М.Б. Барбан и Н.Г. Чудаков в работе [3] на основе плотностной техники получили следующий результат:

$$\pi(x, D, l) = \frac{\mathrm{Li}(x)}{\varphi(D)} \left(1 + O\left(\ln x\right)^{-M}\right) , \tag{1}$$

где $D \leq x^{3/8-\varepsilon}$ (ε произвольно мало) и M произвольно большое число.

М.М. Петечук [4] применил идею А.Г. Постникова к проблеме делителей Дирихле в коротких арифметических прогрессиях и получил асимптотическую формулу:

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l \pmod D}} \tau_k(n) = \frac{xQ_{k-1}(\ln x)}{\varphi(D)} + O\left(\frac{x^{1-\varkappa}}{\varphi(D)}\right),$$

где $D \le x^{3/8-\varepsilon}$ (ε – произвольно мало), $(l, D) = 1$, $Q_{k-1}(z)$ – многочлен степени $(k-1)$ от переменной z с коэффициентами, зависящими от k и p_0, $\varkappa = \min\left\{\frac{\varepsilon}{16}, \frac{\beta}{k^3}\right\}$, $\beta > 0$ – константа, зависящая от p_0.

Для доказательства этой формулы применена идея работы А.А. Карацубы [5], позволяющая решать эту задачу по схеме аддитивной тернарной задачи. При этом автор не прибегает к аналитическим методам, а лишь использует оценки сумм характеров по специальному модулю, основанные на идее А.Г. Постникова.

В настоящей статье дается новое доказательство формулы (1). Мы стремились сделать его по возможности «элементарным» и использовать минимально необходимый объем средств комплексного анализа и теории арифметических рядов Дирихле. Получить вполне элементарное доказательство нам не удалось, поскольку пришлось оценивать суммы значений характеров по простым числам. Для оценок таких сумм использована формула Перрона [6] и стандартная техника контурного интегрирования. Отметим, что теорема о границе нулей $L(s, \chi)$ В.Н. Чубарикова [7], которой мы пользуемся, доказана вполне элементарно. Плотностная техника, на которой основана работа [3], в нашей статье не применяется. Основным результатом статьи является следующая

Теорема. *При* $(l, D) = 1$, $\quad D \le X^{3/8}e^{-(\ln\ln X)^2}$ *справедлива формула*

$$\pi(x, D, l) = \frac{\mathrm{Li}(X)}{\varphi(D)} + R\,, \tag{2}$$

где $R = (X/\varphi(D))\ e^{-(\ln\ln X)^2/7}$, $\varphi(D)$ *– функция Эйлера, а* $\mathrm{Li}(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{du}{\ln u}$.

§1. Вспомогательные леммы

Лемма 1 (тождество Хис-Брауна). *Пусть* $K \geqslant 1$, $z \geqslant 1$. *Тогда для любого* $n < 2z^K$ *имеем*

$$\Lambda(n) = -\sum_{1\leqslant k\leqslant K} (-1)^k \binom{K}{k} \sum_{\substack{m_1\dots m_k n_1\dots n_k = n\,,\\ m_1,\dots,m_k \leqslant z}} \cdots \sum \mu(m_1)\dots\mu(m_k)\ln n_k\,.$$

□ Доказательство см.[8], Propozition 13.3. ■

Лемма 2. *Для любого неглавного характера χ по модулю $D = p_0^n$ справедлива оценка:*

$$\sum_{1\le u\le a} \chi(u) \ll a^{1/2} D^{1/6} \ln D\,.$$

□ Доказательство см. в [9]. ■

Лемма 3. *Пусть χ – произвольный неглавный характер по модулю $D = p_0^n$, $S_a = \sum\limits_{m\le a} \chi(m)$, $\rho = \ln D/\ln a$. Тогда существуют константы $c > 0, \gamma > 0$, зависящие от p_0, такие, что при $1 \le \rho \le 0,5n$ выполняется оценка*

$$|S_a| < ca^{1-\gamma/\rho^2}\,.$$

□ Доказательство см. в [10]. ■

Лемма 4. *Пусть χ – произвольный неглавный характер по модулю $D = p_0^n$. Тогда $L(s,\chi)$ не имеет нулей в области*

$$\sigma > 1 - \frac{b_1}{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}\,, \quad |t| < e^{b_2(\ln\ln D)^2}\,,$$

b_1, b_2 – константы.

□ Сначала покажем, что в области $\sigma \geqslant 1 - \dfrac{\gamma_1}{(\ln D)^{2/3}}$, $\gamma_1 = \gamma/2$, где γ – константа из леммы 3, имеет место оценка

$$L(s,\chi) = O((|\,t| + 1)(\ln D)^{2/3})\,.$$

Справедливо тождество

$$L(s,\chi) = s\int_1^\infty S(x)x^{-s-1}dx\,, \quad S(x) = \sum_{\nu\leqslant x}\chi(\nu)\,.$$

Разобьем интеграл на части:

$$L(s,\chi) = s\int_1^D S(x)x^{-s-1}dx + s\int_D^\infty S(x)x^{-s-1}dx\,. \tag{3}$$

Во втором интеграле для оценки суммы $S(x)$ будем пользоваться оценкой Виноградова-Пойа: $S(x) = O(\sqrt{D}\ln D)$. Имеем:

$$\left|s\int_D^\infty S(x)x^{-s-1}dx\right| \leqslant (|\,t| + 1)\int_D^\infty |S(x)|x^{-\sigma-1}dx \ll (|t| + 1)\sqrt{D}\ln D D^{-\sigma}\,.$$

Поскольку $\sigma > \frac{1}{2}$, то $L(s,\chi) = s\int_1^D S(x)x^{-s-1}dx + O\left((|\,t|+1)\dfrac{\ln D}{D^{\varepsilon}}\right)$, где ε произвольно мало.

Рассмотрим первый интеграл в (3). Разобьем его на части, полагая $N = \exp(\ln D)^{2/3}$:

$$\int_1^D S(x)x^{-s-1}dx = \int_1^N S(x)x^{-s-1}dx + \int_N^D S(x)x^{-s-1}dx\,.$$

В первом интеграле справа сумму $S(x)$ оценим тривиально, а во втором – согласно лемме 3. В результате, получим

$$\left|\int_1^N x^{-s}dx\right| \leqslant \left.\frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right|_1^N = O((\ln D)^{2/3}),$$

$$\left|\int_N^D S(x)x^{-s-1}dx\right| \leqslant \int_N^D |S(x)|x^{-1-\sigma}dx = O\left(\int_N^D x^{\sigma}\exp\left\{-\frac{\gamma\ln^3 x}{\ln^2 D}\right\}dx\right) = [v=\ln x] =$$

$$= O\left(\int_{\ln N}^{\ln D}\exp\left\{v(1-\sigma) - \frac{\gamma v^3}{\ln^2 D}\right\}dv\right) = O\left(\int_{\ln N}^{\ln D}\exp\left\{-\frac{\gamma v^3}{2\ln^2 D}\right\}dv\right) = O((\ln D)^{2/3})\,.$$

Таким образом, мы доказали, что в области $\sigma \geqslant 1 - \dfrac{\gamma_1}{(\ln D)^{2/3}}$

$$L(s,\chi) = O((|\,t|+1)(\ln D)^{2/3})\,.$$

Теперь пусть $\rho = \sigma + it$ – нуль функции $L(s,\chi)$, положим

$$\sigma = 1 - \frac{d}{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}, \qquad d \leqslant 1\,.$$

Надо показать, что $d \geqslant c > 0$. Рассмотрим точку

$$s_0 = 1 + \frac{4d}{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2} = \sigma_0 + it\,.$$

Из точки s_0 опишем круг радиуса $r = \dfrac{c_1}{(\ln D)^{2/3}}$. Точка ρ будет лежать внутри круга радиуса $r/2$, так как

$$\frac{c_1}{2(\ln D)^{2/3}} > \frac{5d}{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}\,.$$

В круге $|s - s_0| < r$

$$L(s,\chi) = O((|\,t|+1)(\ln D)^{2/3})\,.$$

Кроме того,

$$\left|\frac{1}{L(s_0,\chi)}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma_0}} \leqslant 1+\int_1^{\infty}\frac{du}{u^{\sigma_0}} = 1+\frac{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}{4d}\,.$$

Поэтому

$$\left|\frac{L(s,\chi)}{L(s_0,\chi)}\right| \leqslant M = (|\,t|+1)\frac{\ln^2 D}{d}.$$

Точно такая же оценка имеет место в круге $|s-s_1|\leqslant r$, $s_1=\sigma_0+2it$. Применим лемму 6 на с. 99 [10]:

$$\mathrm{Re}\frac{L'(s_0)}{L(s_0)} \geqslant -\frac{4}{r}\ln M + \mathrm{Re}\frac{1}{s_0-\rho} = -\frac{4(\ln D)^{2/3}}{c_1}\ln M + \frac{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}{5d}\,,$$

$$\mathrm{Re}\frac{L'(s_1)}{L(s_1)} \geqslant -\frac{4}{r}\ln M = -\frac{4(\ln D)^{2/3}}{c_1}\ln M,$$

$$\frac{L'(\sigma_0)}{L(\sigma_0)} < \frac{1}{\sigma_0-1}+c_2\,.$$

Справедливо неравенство:

$$3\left\{-\frac{L'(\sigma_0,\chi)}{L(\sigma_0,\chi)}\right\} + 4\left\{-\mathrm{Re}\frac{L'(\sigma_0+it)}{L(\sigma_0+it)}\right\} + \left\{-\mathrm{Re}\frac{L'(\sigma_0+2it)}{L(\sigma_0+2it)}\right\} \geqslant 0\,.$$

Подставляя полученные оценки в это неравенство, получим:

$$3\left\{\frac{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}{4d}+c_2\right\} + 4\left\{-\frac{4(\ln D)^{2/3}}{c_1}\ln M + \frac{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}{5d}\right\} +$$

$$+\frac{4(\ln D)^{2/3}}{c_1}\ln M \geqslant 0\,,$$

$$-\frac{(\ln\ln D)^2}{20d} + \frac{3c_2}{(\ln D)^{2/3}} + \frac{20}{c_1}(\ln\ln D)^2 + \frac{40}{c_1}\ln\ln D - \frac{20}{c_1}\ln d \geqslant 0\,,$$

$$-\frac{1}{d}\left(\frac{(\ln\ln D)^2}{20} - \frac{20d\ln d}{c_1}\right) + \frac{20}{c_1}\left(\frac{3c_2c_1}{20(\ln D)^{2/3}} + (\ln\ln D)^2 + 2\ln\ln D\right) \geqslant 0\,.$$

При $d\to 0$, $d\ln d\to 0$, а $\dfrac{1}{d}\to\infty$, поэтому

$$-\frac{1}{d}\cdot\frac{(\ln\ln D)^2}{20} + \frac{20}{c_1}(\ln\ln D)^2 \geqslant 0, \qquad d\geqslant\frac{c_1}{40}. \qquad \blacksquare$$

Лемма 5. *Пусть χ – произвольный неглавный характер по модулю $D = p_0^n$, $S_a = \sum\limits_{a<p\le 2a} \chi(p)$, где p – простое число. Тогда справедлива оценка:*

$$S_a \ll \frac{a(\ln D)^{5/3}(\ln\ln D)^2}{e^{(\ln\ln D)^2}\ln a}\,.$$

□ Введем в рассмотрение функцию

$$\Lambda_1(n) = \frac{\Lambda(n)}{\ln n} = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & , \quad \text{если} \quad n = p^k\,; \\ 0 & , \quad \text{в противном случае}\,. \end{cases}$$

Из определения функции $\Lambda_1(n)$ следует, что

$$\sum_{a<n\le 2a} \chi(n)\Lambda_1(n) = \sum_{a<p\le 2a} \chi(p) + O(\sqrt{a})\,.$$

С другой стороны,

$$\sum_{a<n\le 2a} \chi(n)\Lambda_1(n) = \sum_{n\le a} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{\ln n}\,.$$

Применим преобразование Абеля, полагая $c_n = \chi(n)\Lambda(n)$, $f(n) = \dfrac{1}{\ln n}$. В результате, получим

$$\int_a^{2a} \left(\sum_{n\le u} \chi(n)\Lambda(n)\right) \frac{du}{u\ln^2 u} + \left(\sum_{a<n\le 2a} \chi(n)\Lambda(n)\right) \frac{1}{\ln 2a}\,.$$

Интеграл можно оценить величиной $\dfrac{a}{e^{c'\sqrt{\ln a}}\ln^2 a}$, где c' – константа. Поэтому

$$\sum_{a<p\le 2a} \chi(p) = \frac{1}{\ln a} \sum_{a<n\le 2a} \chi(n)\Lambda(n) + O\left(\frac{a}{e^{c'\sqrt{\ln a}}\ln^2 a}\right)\,.$$

Для суммы справа применим формулу Перрона:

$$\sum_{a<n\le 2a} \chi(n)\Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right) \frac{(2a)^s - a^s}{s}\,ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right) \frac{(2^s-1)a^s}{s}\,ds\,.$$

Применяя формулу разложения логарифмической производной $L(s,\chi)$-функции по её нулям и величину границы этих нулей, имеем:

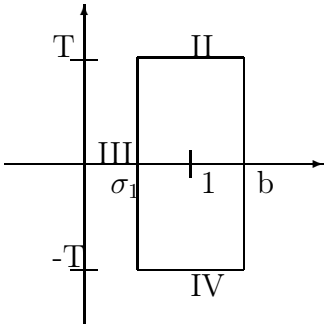
$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum_{|t-\gamma_n|\le 1} \frac{1}{s-\rho_n} + O(\ln DT)\,,$$

$$\beta_n \le 1 - \frac{c}{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}, \quad \sigma \ge 1 - \frac{c}{2(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}\,,$$

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi) \ll \frac{2}{c}(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2 \sum_{|t-\gamma_n|\le 1} 1 + O(\ln DT) = O((\ln D)^{5/3}(\ln\ln D)^2)\,,$$

где χ – характер по модулю $D = p_0^n$ и $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ – нули функции $L(s,\chi)$.

Рассмотрим контур, указанный на рисунке, для которого выберем $b = 1 + \dfrac{1}{\ln a}$, $\sigma_1 = 1 - \dfrac{c_0}{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}$, $T = e^{(\ln\ln D)^2}$,



Рассмотрим интегралы по сторонам II и IV соответствующего контура:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-iT}^{b+iT}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{a^s}{s}ds\right| \le \int_{\sigma_1}^{b}\left|-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right|\frac{a^\sigma}{T}d\sigma = O\left(\frac{a}{e^{(\ln\ln D)^2}\ln a}(\ln D)^{5/3}(\ln\ln D)^2\right).$$

По стороне III интеграл можно оценить следующим образом:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-iT}^{\sigma_1+iT}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{a^s}{s}ds\right| \le \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{T}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{a^{\sigma+it}}{t}dt\right| =$$

$$= O\left(a^{\sigma_1}\ln T\left|-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right|\right) = O\left(\frac{a(\ln D)^{5/3}(\ln\ln D)^2}{a^{c_0/(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}}\right).$$

Следовательно интеграл можно оценить величиной $O\left(\dfrac{a}{e^{(\ln\ln D)^2}\ln a}(\ln D)^{5/3}(\ln\ln D)^2\right)$, откуда и следует утверждение леммы. ■

Лемма 6 (А. И. Виноградова). *Количество чисел, не превосходящих x, и таких, что все их простые делители не превосходят $z \le \sqrt{x}$, имеет оценку*

$$Bx \exp\left(-\frac{1}{\alpha}\left(\ln\frac{1}{\alpha} + \ln\ln\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha} + \frac{\theta}{\alpha \ln 1/\alpha}\right),$$

где $\alpha = \ln z / \ln x$, $|\theta| \le 1$.

□ См. в [11]. ■

Лемма 7. *Пусть χ – произвольный неглавный характер по модулю $D = p_0^n$. Справедлива оценка:*

$$\sum_{n \le x} \mu(n)\chi(n) \ll \frac{x(\ln D)^2}{e^{(\ln\ln D)^2/2}}.$$

□ Очевидно, что

$$S = \sum_{n \le x} \mu(n)\chi(n) = 1 + \sum_{r=1}^{R} (-1)^r \sum_{\delta_r \le x} \chi(\delta_r),$$

где δ_r – бесквадратное число, имеющее ровно r простых делителей, $R = [\log_2 x]$.

Пусть $1 \le r \le R$, обозначим $S_r = \sum_{\delta_r \le x} \chi(\delta_r)$. Если $r = 1$, то S_r – сумма по простым числам, её можно оценить согласно лемме 5.

Пусть $r > 1$. Разобьём числа δ_r на $r+1$ непересекающихся классов $A_0, A_1, \ldots, A_r$ следующим образом. При $0 \le m \le r$ положим $\delta_r \in A_m$, если среди простых делителей δ_r ровно m простых делителей, больших $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$, и ровно $r - m$ простых делителей, не превосходящих $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$, где $0 < \varepsilon_1 < 0,01$.

Рассмотрим сначала числа δ_r из класса A_0. Все простые делители этих чисел не превосходят $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$. Поэтому

$$\left| \sum_{\substack{\delta_r \le x, \\ \delta_r \in A_0}} \chi(\delta_r) \right| \le {\sum_{n \le x}}' 1,$$

где штрих означает, что все простые делители n не превосходят $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$. Оценим эту сумму по лемме А.И. Виноградова (лемма 6). В результате, получим:

$${\sum_{n \le x}}' 1 \ll x \exp\left(-(\ln D)^{1/3-\varepsilon_1}\right).$$

Следовательно

$$\left| \sum_{\substack{\delta_r \le x, \\ \delta_r \in A_0}} \chi(\delta_r) \right| \ll x \exp\left(-(\ln D)^{1/3-\varepsilon_1}\right).$$

Рассмотрим числа δ_r, принадлежащие остальным классам A_m, $1 \le m \le r$. Любое такое число можно однозначно представить в виде

$$\delta_r = \delta'_{r-m}\delta''_m\,,$$

где δ'_{r-m} – бесквадратное число, имеющее $r-m$ простых делителей, каждый из которых не превосходит $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$, а δ''_m – бесквадратное число, имеющее m простых делителей, каждый из которых больше $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$. Имеем:

$$\sum_{\substack{\delta_r \le x,\\ \delta_r \in A_m}} \chi(\delta_r) = \sum_{\delta'_{r-m}\delta''_m \le x} \chi(\delta'_{r-m}\delta''_m) =$$

$$= \sum_{\substack{\delta'_{r-m}\delta''_m \le x,\\ \delta'_{r-m} \le x^{0,1}}} \chi(\delta'_{r-m}\delta''_m) + \sum_{\substack{\delta'_{r-m}\delta''_m \le x,\\ \delta'_{r-m} > x^{0,1}}} \chi(\delta'_{r-m}\delta''_m) =$$

$$= S_1(m,r) + S_2(m,r)\,.$$

Оценим сумму $S_2(m,r)$. Так как $\delta'_{r-m}\delta''_m \le x$, $\delta'_{r-m} > x^{0,1}$, то число δ''_m удовлетворяет неравенству $\delta''_m \le x^{0,9}$, и поэтому

$$|S_2(m,r)| \le \sum_{\delta''_m \le x^{0,9}} \sum_{\delta'_{r-m} < z} 1\,,$$

где $z = \dfrac{x}{\delta''_m}$, $z > x^{0,1}$.

В силу леммы А. И. Виноградова,

$$\sum_{\delta'_{r-m} < z} 1 \ll \frac{x}{\delta''_m} \exp\left(-0,1(\ln D)^{1/3-\varepsilon_1}\right)\,,$$

следовательно,

$$|S_2(m,r)| \ll x \exp\left(-0,05(\ln D)^{1/3-\varepsilon_1}\right)\,.$$

Оценим теперь сумму $S_1(m,r)$. Имеем:

$$|S_1(m,r)| \le \sum_{\delta'_{r-m} \le x^{0,1}} \left| \sum_{\delta''_m \le z_1} \chi(\delta''_m) \right|\,,$$

где $z_1 = \dfrac{x}{\delta'_{r-m}}$, $z_1 \ge x^{0,9}$.

Сравним внутреннюю сумму с суммой

$$\sum_{\substack{\delta''_{m-1}p \le z_1,\\ p > e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}}} \chi(\delta''_{m-1})\chi(p)\,,$$

где δ''_{m-1} пробегает множество бесквадратных чисел, имеющих ровно $(m-1)$ простых делителей, каждый из которых больше $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$.

Числа $\delta''_{m-1}p$ могут не быть бесквадратными; если число $\delta''_{m-1}p$ не бесквадратное, то оно делится на p^2. Вклад таких чисел в сумму не превосходит

$$\sum_{p>e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}} \frac{z_1}{p^2} \ll z_1 e^{-(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}.$$

Если же числа $\delta''_{m-1}p$ бесквадратные, то каждое заданное число $\delta''_m \le z_1$ встречается среди чисел $\delta''_{m-1}p$ ровно m раз, поэтому

$$\frac{1}{m}\sum_{\delta''_{m-1}p\le z_1} \chi(\delta''_{m-1}p) = \sum_{\delta''_m\le z_1} \chi(\delta''_m) + O\left(z_1 e^{-(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}\right),$$

где

$$\left|\sum_{\delta''_m\le z_1} \chi(\delta''_m)\right| \le \sum_{\delta''_{m-1}\le z_1 e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}} \left|\sum_{e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}<p\le \frac{z_1}{\delta''_{m-1}}} \chi(p)\right|.$$

Таким образом, для оценки суммы $\sum_{n\le x}\mu(n)\chi(n)$ требуется оценить сумму по простым числам $\sum_{p\le z_2}\chi(p)$, где $z_2 > e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$. Применим лемму 5, получим:

$$\sum_{p\le z_2}\chi(p) = O\left(z_2 e^{-1/2(\ln\ln D)^2}\right).$$

В итоге, объединяя оценки всех рассмотренных случаев, имеем:

$$\sum_{n\le x}\mu(n)\chi(n) \ll \frac{x(\ln D)^2}{e^{(\ln\ln D)^2/2}}. \qquad \blacksquare$$

2. Доказательство теоремы

Очевидно,что

$$\sum_{n\le X}\Lambda_1(n) = \sum_{p\le X}1 + \frac{1}{2}\sum_{p^2\le X}1 + \frac{1}{3}\sum_{p^3\le X}1 + \ldots = \sum_{p\le X}1 + O(\sqrt{X}).$$

Тогда

$$\pi(X,D,l) = \sum_{\substack{n\le X,\\ n\equiv l \pmod D}} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} + O(\sqrt{X}).$$

Применяя преобразование Абеля к первой сумме слева и производя необходимые оценки, мы получим:

$$\pi(X,D,l)=\frac{1}{\ln n}\sum_{\substack{n\le X,\\ n\equiv l \pmod D}}\Lambda(n)+O\left(Xe^{-c'\sqrt{\ln X}}\right).$$

Из ортогональности характеров имеем:

$$\sum_{\substack{n\le X,\\ n\equiv l \pmod D}}\Lambda(n)=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ D)}\overline{\chi}(l)\sum_{n\le X}\Lambda(n)\chi(n).$$

Выделим слагаемое с χ_0:

$$\sum_{\substack{n\le X,\\ n\equiv l \pmod D}}\Lambda(n)=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\substack{n\le X,\\ (n,D)=1}}\Lambda(n)+\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{n\le X}\Lambda(n)\chi(n).$$

Первая сумма справа даст нам главный член формулы (7), а вторая – остаток R. Ко второй сумме применим тождество Хис-Брауна (лемма 1):

$$R=-\sum_{1\leqslant k\leqslant K}(-1)^k\binom{K}{k}\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{\substack{n_1\dots n_k n_{k+1}\dots n_{2k}=n,\\ n_1,\dots,n_k\leqslant z}}\cdots\sum\mu(n_1)\dots\mu(n_k)\ln n_{2k}\times$$

$$\times\ \chi(n_1)\dots\chi(n_k)\chi(n_{k+1})\dots\chi(n_{2k})=$$

$$=-\sum_{1\leqslant k\leqslant K}(-1)^k(\ln X)^{2k}\binom{K}{k}\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\ \times$$

$$\times\sum_{N_1<n_1\le 2N_1}\mu(n_1)\chi(n_1)\dots\sum_{N_k<n_k\le 2N_k}\mu(n_k)\chi(n_k)\times$$

$$\times\sum_{\substack{N_{k+1}<n_{k+1}\le 2N_{k+1},\\ n_1\dots n_k n_{k+1}\dots n_{2k}\le X,\, n_1,\dots,n_k\le z}}\chi(n_{k+1})\dots\sum_{N_{2k}<n_{2k}\le 2N_{2k}}\chi(n_{2k})\ln n_{2k}.$$

Пусть $K=100$. Для оценки остаточного члена R достаточно оценить сумму

$$S=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{N_1<n_1\le 2N_1}\mu(n_1)\chi(n_1)\dots\sum_{N_k<n_k\le 2N_k}\mu(n_k)\chi(n_k)\times$$

$$\times\sum_{\substack{N_{k+1}<n_{k+1}\le 2N_{k+1},\\ n_1\dots n_k n_{k+1}\dots n_{2k}\le X,\, n_1,\dots,n_k\le z}}\chi(n_{k+1})\dots\sum_{N_{2k}<n_{2k}\le 2N_{2k}}\chi(n_{2k})\ln n_{2k}.$$

Возможны случаи:

1. $N_{2k} = \max\{N_1, \dots, N_k, N_{k+1}, \dots, N_{2k}\}$.
2. $N_1 = \max\{N_1, \dots, N_k, N_{k+1}, \dots, N_{2k}\}$.

В первом случае, применив, преобразование Абеля, можно свести сумму

$$\sum_{N_{2k} < n_{2k} \le 2N_{2k}} \chi(n_{2k}) \ln n_{2k} \quad \text{к сумме} \quad \ln(2N_k) \times \sum_{N_{2k} < n_{2k} \le 2N_{2k}} \chi(n_{2k}),$$

где $\ln(2N_k) \le X^{\delta/10}$.

Будем предполагать, что

$$N_{2k} \ge N_1 \ge N_{k+1} \ge N_2 \ge N_{k+2} \ge \dots \quad .$$

Положим $U = N_1 \dots N_k$, $V = N_{k+1} \dots N_{2k-1}$. Тогда $U \ge V$, $NV \ge U \ge V$. Кроме того, $N = N_{2k}$, $N_{2k} \ge X^{1/2k}$. Пусть δ – вещественное число, причем, $0 < \delta \le 1/2k$, и пусть $\tau'_k(u), \tau'_{k-1}(v), \tau'_{2k-1}(y)$ соответственно означают количество решений в натуральных числах уравнений

$$n_1 \dots n_k = u, \qquad n_{k+1} \dots n_{2k-1} = v, \qquad n_1 \dots n_k n_{k+1} \dots n_{2k-1} = y,$$

где

$$N_1 < n_1 \le 2N_1, \quad \dots \quad , N_k < n_k \le 2N_k,$$
$$N_{k+1} < n_{k+1} \le 2N_{k+1}, \quad \dots \quad , N_{2k-1} < n_{2k-1} \le 2N_{2k-1}.$$

Рассмотрим случай $U \le X^\delta$. Имеем:

$$|S| \le \frac{1}{\varphi(D)} \left| \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{N_1 < n_1 \le 2N_1} \chi(n_1) \dots \sum_{N_k < n_k \le 2N_k} \chi(n_k) \right| \times$$

$$\times \left| \sum_{\substack{N_{k+1} < n_{k+1} \le 2N_{k+1}, \\ n_1 \dots n_k n_{k+1} \dots n_{2k-1} \le X}} \chi(n_{k+1}) \dots \sum_{N_{2k-1} < n_{2k-1} \le 2N_{2k-1}} \chi(n_{2k-1}) \sum_{N_{2k} < n_{2k} \le 2N_{2k}} \chi(n_{2k}) \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \sum_{N_1 < n_1 < 2N_1} \dots \sum_{N_{2k-1} < n_{2k-1} \le 2N_{2k-1}} \max_{\substack{N_{2k} < T' \le T'' \le 2N_{2k}, \\ \chi \ne \chi_0}} \left\{ \left| \sum_{T' < t \le T''} \chi(t) \right| \right\}.$$

В силу леммы 1 справедлива оценка

$$\sum_{N < t \le 2N} \chi(t) \ll N^{1/2} D^{1/6} \ln D.$$

Следовательно,

$$S \ll N_1 \dots N_{2k-1} \sqrt{N} D^{1/6} \ln D.$$

Так как $N_1 \dots N_{2k-1} N < X$, $V \le U \le X^{\delta}$, $D \le X^{3/8}$, $\ln(2N_k) \le X^{\delta/10}$, то для суммы S получим:

$$S \ll N_1 \dots N_{2k-1} \sqrt{N}\, D^{1/6} \ln X = \sqrt{N_1 \dots N_{2k-1}}\, \sqrt{N_1 \dots N_{2k}} D^{1/6} \ln X <$$

$$< \sqrt{UV}\sqrt{X} D^{1/6} \ln X \le X^{1/2+\delta/5} D^{1/6} \ln X \ll X^{3/4+\delta} D^{-1/3}\,.$$

Пусть теперь $U > X^{\delta}$. Докажем, что в этом случае:

$$S \ll X^{0,5\delta} \max_{\substack{N \le T' \le T'' \le 2N, \\ UV \le Y' \le Y'' \le 2^{2k-1}UV}} \{\, |S'| \,\} + \frac{X^{1-\frac{2\delta}{5}}}{\varphi(D)}\,, \tag{4}$$

где

$$S' = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T' < t \le T''} \chi(t) \sum_{Y' < y \le Y''} \chi(y) \tau'_{2k-1}(y)\,.$$

Будем использовать метод исчерпывания криволинейной области И.М. Виноградова [12]. Прямоугольной областью на плоскости (t, y) будем называть область, задаваемую неравенствами

$$T' < t \le T''\,, \qquad Y' < y \le Y''\,,$$

где $N \le T' < T'' \le 2N\,, \quad UV \le Y' < Y'' \le 2^{2k-1}UV$. Сумму S перепишем в виде

$$S = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi}\,(l) \sum_{\substack{N < t \le 2N, \\ ty \le X}} \sum_{UV < y \le 2^{2k-1}UV} \chi(t)\chi(y)\tau'_{2k-1}(y)\,.$$

Если $2N \cdot 2^{2k-1}UV \le X$, то (4) тривиально верно в силу того, что тогда область суммирования в S по переменным t и y прямоугольная.

Докажем (4) в случае, когда $NUV < X < 2^{2k-1}UV$. Определим величины T_1, T_2, полагая

$$T_1 = \max\left\{N, \frac{X}{2^{2k-1}UV}\right\}\,, \qquad T_2 = \min\left\{2N, \frac{X}{UV}\right\}\,.$$

Обозначим на плоскости (t, y) области, задаваемые неравенствами:

$$\Omega_1 : N_1 < t \le T_2\,, \quad UV < y \le \frac{X}{T_2}\,;$$

$$\Omega_2 : N_1 < t \le T_1\,, \quad \frac{X}{T_2} < y \le 2^{2k-1}UV\,, \quad ty \le x\,;$$

$$\Omega_3 : T_1 < t \le T_2\,, \quad \frac{X}{T_2} < y \le \frac{X}{t}\,.$$

Область суммирования Ω в сумме S есть объединение попарно непересекающихся областей $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, причём Ω_1 и Ω_2 либо пустые, либо прямоугольные. Поэтому формулу (4) достаточно доказать для

$$S_1 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T_1 < t \leq T_2} \sum_{X/T_2 < y \leq X/t} \chi(t)\chi(y)\tau'_{2k-1}(y)\,.$$

Пусть T_0 и Δ таковы, что $T_1 \leq T_0 < T_0 + \Delta \leq T_2$. Область Ω', ограниченную на плоскости (t, y) неравенствами

$$T_0 < t \leq T_0 + \Delta\,, \qquad \frac{X}{T_0 + \Delta} < y \leq \frac{X}{t}\,,$$

будем называть криволинейным треугольником на плоскости (t, y) с основанием, равным Δ.

Любой криволинейный треугольник с основанием, равным Δ, можно представить как объединение попарно непересекающихся прямоугольной области и двух криволинейных треугольников с основанием, равным $\Delta/2$. Повторяя этот процесс s раз мы получим, что каждый криволинейный треугольник Ω' с основанием, равным Δ, есть объединение попарно непересекающихся областей – 2^s криволинейных треугольников с основанием, равным $\Delta/2^s$ и $1 + 2 + \ldots + 2^{s-1} = 2^s - 1 < 2^s$ прямоугольных областей.

Положим $s_0 = [\delta \log_2 X/2]$. В сумме S_1 область суммирования по t и y является криволинейным треугольником с основанием, равным $T_2 - T_1$. Представим её в виде объединения попарно непересекающихся подобластей – 2^{s_0} криволинейных треугольников с основанием, равным $(T_2 - T_1)/2^{s_0}$ и не более чем 2^{s_0} прямоугольных областей. Оценим сумму S_2 по одному из таких криволинейных треугольников. Пусть

$$S_2 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T'_1 < t \leq T'_2} \sum_{X/T'_2 < y \leq X/t} \chi(t)\chi(y)\tau'_{2k-1}(y)\,.$$

Если через S_3 обозначим такую же сумму, как и S_2, но суммирование по χ распространено на все характеры по mod D, то

$$|S_2 - S_3| = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T'_1 < t \leq T'_2} \sum_{X/T'_2/< y \leq X/t} \chi_0(t)\chi_0(y)\tau'_{2k-1}(y) \leq$$

$$\leq \frac{X^{\delta/10}}{\varphi(D)}(T'_2 - T'_1 + 1)\left(\frac{X}{T'_2} - \frac{X}{T'_1} + 1\right) \leq \tag{5}$$

$$\leq \frac{X^{\delta/10}}{\varphi(D)}\left(\frac{N}{2^{s_0}} + 1\right)\left(\frac{X}{2^{s_0}N} + 1\right)\,.$$

Положим

$$S_4 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T'_1 < t \leq T'_2} \sum_{X/T'_2 < y \leq X/T'_1} \chi(t)\chi(y)\tau'_{2k-1}(y)\,.$$

S_3 и S_4 равны числу решений, соответственно, сравнений

$$n_1 \dots n_{2k} \equiv l (\mathrm{mod}\ D)\,, \quad T_1' < n_{2k} \le T_2'\,, \quad N_2 < n_2 \le 2N_2\,, \dots, N_{2k-1} < n_{2k-1} \le 2N_{2k-1}\,,$$

$$\frac{X}{T_2'} < n_1 \dots n_{2k-1} \le \frac{X}{n_{2k}}\,,$$

$$n_1 \dots n_{2k} \equiv l (\mathrm{mod}\ D)\,, \quad T_1' < n_{2k} \le T_2'\,, \quad N_2 < n_2 \le 2N_2\,, \dots, N_{2k-1} < n_{2k-1} \le 2N_{2k-1}\,,$$

$$\frac{X}{T_2'} < n_2 \dots n_{2k-1} \le \frac{X}{T_1'}\,.$$

Область, задаваемая неравенствами $T_1' < t \le T_2'$, $\dfrac{X}{T_2'} < y \le \dfrac{X}{t}$ содержится в области, задаваемой неравенствами $T_1' < t \le T_2'$, $\dfrac{X}{T_2'} < y \le \dfrac{X}{T_1'}$. Поэтому

$$0 \le S_3 \le S_4\,.$$

Отсюда следует

$$S_4 - \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T_1' < t \le T_2'} \sum_{X/T_2' < y \le X/T_1'} \chi(t)\chi(y)\tau_{2k-1}'(y) \ll$$

$$\ll \frac{X^{\delta/10}}{\varphi(D)} \left(\frac{N}{2^{s_0}} + 1 \right) \left(\frac{X}{2^{s_0} N} + 1 \right) \ll \frac{X^{1-2\delta/5}}{2^{s_0}\varphi(D)}\,.$$

В результате, имеем

$$S_2 \ll S_3 + \frac{X^{1-\frac{2\delta}{5}}}{2^{s_0}\varphi(D)} \le S_4 + \frac{X^{1-\frac{2\delta}{5}}}{2^{s_0}\varphi(D)} \ll$$

$$\ll \frac{1}{\varphi(D)} \left| \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T_1' < t \le T_2'} \sum_{X/T_2' < y \le X/T_1'} \chi(t)\chi(y)\tau_{2k-1}'(y) \right| + \frac{X^{1-2\delta/5}}{2^{s_0}\varphi(D)}\,.$$

Следовательно, для суммы S_2 получим

$$S_2 \ll \max_{\substack{N \le T' < T'' \le 2N, \\ UV \le Y' < Y'' \le 2^{2k-1}UV}} \{\, |S'| \,\} + \frac{X^{1-2\delta/5}}{2^{s_0}\varphi(D)}\,.$$

Так как S_1 является суммой $< 2^{s_0} \ll X^{\delta/2}$ слагаемых вида S' и $2^{s_0} \ll X^{\delta/2}$ слагаемых виды S_2, то неравенство (4) справедливо для S_1. Таким образом, доказательство неравенства (4) завершено.

Далее

$$\sum_{T'<t\le T''}\chi(t)=\sum_{1<t\le T''}\chi(t)-\sum_{1<t\le T'}\chi(t)\,,$$

$$\sum_{Y'<t\le Y''}\chi(y)\tau'_{2k-1}(y)=\sum_{1<t\le Y''}\chi(y)\tau'_{2k-1}(y)-\sum_{1<t\le Y'}\chi(y)\tau'_{2k-1}(y)\,.$$

Поэтому из неравенства (4), учитывая $\ln(2N_k)\le X^{\delta/10}$, получаем:

$$S\ll X^{0,6\delta}\max_{\substack{N\le T\le 2N,\\ UV\le Y\le 2^{2k-1}UV}}\{\,|S'_1|\,\}\;+\;\frac{X^{1-\delta/3}}{\varphi(D)}\,, \tag{6}$$

где

$$S'_1=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\overline{\chi}\,(l)\sum_{t\le T}\chi(t)\sum_{y\le Y}\chi(y)\tau'_{2k-1}(y)\,.$$

Возможны два случая: $V\le X^{\delta}$ и $V>X^{\delta}$. Рассмотрим случай $V\le X^{\delta}$. Оценим сумму S'_1 при $N\le T\le 2N,\quad UV\le Y\le 2^{2k-1}UV$. Имеем:

$$|S'_1|=\frac{1}{\varphi(D)}\left|\sum_{\chi\ne\chi_0}\overline{\chi}\,(l)\sum_{t\le T}\chi(t)\sum_{V<v\le 2^{k-1}V}\chi(v)\tau'_{k-1}(v)\sum_{U<u\le U_v}\chi(u)\tau'_k(u)\right|\,,$$

где $U_v=\min\left\{2^kU,\ Y/v\right\}$. Отсюда имеем:

$$\begin{aligned}|S'_1|\le\max_{\chi\ne\chi_0}&\left\{\left|\sum_{t\le T}\chi(t)\right|\right\}\;\times\\ &\times\sum_{N_{k+1}<n_{k+1}\le 2N_{k+1}}\cdots\sum_{N_{2k-1}<n_k\le 2N_{2k-1}}\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\left|\sum_{U<u\le U_v}\chi(u)\tau'_k(u)\right|\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Применив неравенство Коши, получим:

$$\sigma=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\left|\sum_{U<u\le U_v}\chi(u)\tau'_k(u)\right|\le(\sigma_1)^{\frac{1}{2}}\,,$$

где

$$\sigma_1=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ D)}\left|\sum_{U<u\le U_v}\chi(u)\tau'_k(u)\right|^2\,.$$

Заметим, что σ_1 равняется числу решений сранения

$$n_1\ldots n_k\equiv n'_1\ldots n'_k\pmod D\,;$$

$$N_1<n_1,\ n'_1\le 2N_1\,,\quad\ldots,\quad N_k<n_k,\ n'_k\le 2N_k\,,$$

$$U<n_1\ldots n_k,\qquad n'_1\ldots n'_k\le U_v\,.$$

Число решений этого сравнения не превосходит величины

$$\sum_{U<u\le U_v}\tau_k(u)\sum_{\frac{U-u}{D}<d\le\frac{U_v-u}{D}}\tau_k(u+dD)\le$$

$$\le\sum_{U<u\le U_v}u^{\delta/10}\sum_{\frac{U-u}{D}<d\le\frac{U_v-u}{D}}(u+dD)^{\delta/10}\ll$$

$$\ll X^{\delta/5}\sum_{U<u\le 2^kU}\left(\frac{U_v-U}{D}+1\right)\ll X^{\delta/5}\left(\frac{U}{D}+U\right).$$

Отсюда

$$\sigma\ll X^{\delta/10}\left(\frac{U}{\sqrt{D}}\ +\ \sqrt{U}\right). \tag{8}$$

Из (7), (8), а также по лемме 1 получим:

$$S_1'\ll\max_{\chi\ne\chi_0}\left\{\left|\sum_{t\le T}\chi(t)\right|\right\}X^{\delta/10}V\left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right)\ll N^{1/2}D^{1/6}\ln DVX^{\delta/10}\left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right).$$

Так как

$$N^{1/2}U=(NU)^{1/2}(U^2)^{1/4}\ll X^{1/2}(NUV)^{1/4}\le X^{3/4},$$

$$(NU)^{1/2}\ll X^{1/2},\qquad X^{1/2}D^{1/6}\ll X^{3/4}D^{-1/3},$$

то

$$S_1'\ll X^{1,2\,\delta}(X^{3/4}D^{-1/3}+X^{1/2}D^{1/6})\ll X^{3/4+1,2\,\delta}D^{-1/3}.$$

Таким образом при $V\le X^\delta$ получаем:

$$S\ll X^{3/4+2\,\delta}D^{-1/3}+\frac{X^{1-\delta/3}}{\varphi(D)}.$$

Рассмотрим оставшийся случай, когда $V>X^\delta$. Можно показать, снова используя метод исчерпывания криволинейной области, что для суммы S_1' при $N<T\le 2N$, $UV<Y\le 2^{2k-1}UV$ справедлива оценка

$$S_1'\ll X^\delta\max_{\substack{U\le U'<U''\le 2^kU,\\ V\le V'<V''\le 2^{k-1}V}}\{\ |S''|\ \}+\frac{X^{1-\,0,9\,\delta}}{\varphi(D)}, \tag{9}$$

где

$$S''=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\overline{\chi}\ (l)\sum_{t\le T}\chi(t)\sum_{U'<u\le U''}\ \sum_{V'<v\le V''}\chi(u)\tau_k'(u)\chi(v)\tau_{k-1}'(v).$$

Оценим сумму S''. Имеем:

$$S'' \le \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \left| \sum_{t \le T} \chi(t) \right| \left| \sum_{U' < u \le U''} \chi(u) \tau'_k(u) \right| \left| \sum_{V' < v \le V''} \chi(v) \tau'_{k-1}(v) \right| \le$$

$$\le \max_{\chi \ne \chi_0} \left\{ \left| \sum_{t \le T} \chi(t) \right| \right\} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi (\mathrm{mod} D)} \left| \sum_{U' < u \le U''} \chi(u) \tau'_k(u) \right| \left| \sum_{V' < v \le V''} \chi(v) \tau'_{k-1}(v) \right| .$$

Применяя неравенство Коши, получаем:

$$S'' \ll \max_{\chi \ne \chi_0} \left\{ \left| \sum_{t \le T} \chi(t) \right| \right\} \cdot \left(\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\ D)} \left| \sum_{U' < u \le U''} \chi(u) \tau'_k(u) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\ D)} \left| \sum_{V' < v \le V''} \chi(v) \tau'_{k-1}(v) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Заметим,что сумма

$$\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\ D)} \left| \sum_{U' < u \le U''} \chi(u) \tau'_k(u) \right|^2$$

равна количеству решений сравнения

$$n_1 \dots n_k \equiv n'_1 \dots n'_k \pmod D;$$

$$N_1 < n_1 , \quad n'_1 \le 2N_1 , \quad \dots , \quad N_k < n_k , \quad n'_k \le 2N_k ,$$

$$U' < n_1 \dots n_k , \qquad n'_1 \dots n'_k \le U'' .$$

Для количества решений этого сравнения имеем оценку:

$$\sum_{U' < u \le U''} \tau_k(u) \sum_{\frac{U'-u}{D} < d \le \frac{U''-u}{D}} \tau_k(u + dD) \ll$$

$$\ll X^{\delta/5} \sum_{U < u \le 2^k U} \left(\frac{U'' - U'}{D} + 1 \right) \ll X^{\delta/5} \left(\frac{U}{D} + U \right) .$$

Аналогично имеем:

$$\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\ D)} \left| \sum_{V' < u \le V''} \chi(v) \tau'_{k-1}(v) \right|^2 \ll X^{\delta/5} \left(\frac{V^2}{D} + V \right) .$$

Следовательно,

$$S'' \ll \max_{\chi\neq\chi_0}\left\{\left|\sum_{t\le T}\chi(t)\right|\right\} X^{\delta/5}\left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right)\left(\frac{V}{\sqrt{D}}+\sqrt{V}\right).$$

В силу неравенств $T \le 2N$, $V \le U \le NV$, $NUV < X$, $D \le X^{3/8}$ и леммы 1 получим:

$$X^{\delta/5}\max_{\chi\neq\chi_0}\left\{\left|\sum_{t\le T}\chi(t)\right|\right\}\left(\frac{U\sqrt{V}+\sqrt{U}V}{\sqrt{D}}+\sqrt{UV}\right)\ll$$

$$\ll X^{\delta/5}N^{1/2}D^{1/6}\ln X\left(\frac{U\sqrt{V}}{\sqrt{D}}+\sqrt{UV}\right)\ll$$

$$\ll X^{0,3\,\delta}\left(\frac{\sqrt{U}\sqrt{NUV}}{D^{1/3}}+\sqrt{NUV}D^{1/6}\right)\ll X^{0,3\,\delta}\left(\frac{X^{1/2}(NUV)^{1/4}}{D^{1/3}}+X^{1/2}D^{1/6}\right)\ll$$

$$\ll X^{3/4+0,3\,\delta}D^{-1/3}$$

Таким образом,

$$S''\ll\frac{X^{1+0,3\,\delta}}{D}\,N^{-1}\max_{\chi\neq\chi_0}\left\{\left|\sum_{t\le T}\chi(t)\right|\right\}+X^{3/4+0,3\,\delta}D^{-1/3}.$$

Из (6) следует, что

$$S_1'\ll\frac{X^{1+1,3\,\delta}}{D}\,N^{-1}\max_{\chi\neq\chi_0}\left\{\left|\sum_{t\le T}\chi(t)\right|\right\}+X^{3/4+1,3\,\delta}D^{-1/3}+\frac{X^{1-\,0,9\,\delta}}{\varphi(D)}.$$

В силу (6) получаем:

$$S\ll\frac{X^{1+2\,\delta}}{D}\,N^{-1}\max_{\chi\neq\chi_0}\left\{\left|\sum_{t\le T}\chi(t)\right|\right\}+X^{3/4+2\,\delta}D^{-1/3}+\frac{X^{1-\,0,3\,\delta}}{\varphi(D)}.$$

Обозначим $A = N^{-1}\sum\limits_{t\le T}\chi(t)$, где $N \le T \le 2N$, $D_1 = p_0^{m_1}$ – модуль, по которому характер χ примитивный. Оценим величину A. Так как $N \ge X^{1/2k}$ и $D_1 \le D \le X^{3/8}$, то $\dfrac{\ln D_1}{\ln T} \le 2k$. Возможны случаи:

1. $\dfrac{m_1}{20} > k$, $\dfrac{\ln D_1}{\ln T} > 1$, $m_1 > 81$. В этом случае по лемме 3 величина $A \ll N^{-\gamma/4k^2} \ll X^{-\gamma/8k^3}$;

2. $T \geqslant D_1$. Тогда

$$A \ll \frac{\sqrt{D_1}\ln D_1}{N} \leq \frac{\sqrt{T}\ln T}{N} \ll N^{-1/2}\ln X \leq X^{-1/4k}\,.$$

3. $m_1 \leq \max\{81, 20k\} \leq 41k$. В этом случае сумму характеров оценим модулем D_1. Имеем:

$$A \;\leq\; \frac{p_0^{m_1}}{N} \;\leq\; \frac{p_0^{41k}}{N}\;.$$

Так как $\dfrac{1}{8k^3} < \dfrac{1}{4k}$ и в лемме 3 константа $\gamma < 1$, то во всех случаях $A \ll N^{-\gamma/8k^3}$.

Выберем $\delta = \dfrac{(\ln\ln X)^2}{6\ln X}$. Тогда

$$S \ll \frac{X}{De^{(\ln\ln X)^2/3}}\;.$$

Рассмотрим второй случай, когда $N_1 = \max\{N_1, \ldots, N_k, N_{k+1}, \ldots, N_{2k}\}$. Будем предполагать,что $N_1 \geq N_2 \geq N_{k+2} \geq N_3 \geq \ldots$. Положим

$$U = N_2 \ldots N_{k+1}\,, \quad V = N_{k+2}\ldots N_{2k}\,, \quad N = N_1\,.$$

Тогда $U \geq V$, $NV \geq U \geq V$, причём, $U > X^\delta$, $V > X^\delta$.

Действуя, как в первом случае, для суммы S при $N < T \leq 2N$ можно получить оценку:

$$S \ll \frac{X^{1+2\,\delta}}{D}\;N^{-1}\max_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{t\leq T}\mu(t)\chi(t)\right| + X^{3/4+2\,\delta}D^{-1/3} + \frac{X^{1-\,0{,}3\,\delta}}{\varphi(D)}\,,$$

Согласно лемме 7, имеем:

$$S \ll \frac{X^{1+2\,\delta}}{D}\;N^{-1}\frac{N(\ln D)^2}{e^{(\ln\ln D)^2/2}} + X^{3/4+2\,\delta}D^{-1/3} + \frac{X^{1-\,0{,}3\,\delta}}{\varphi(D)}\;.$$

Следовательно, как и в первом случае, выбрав $\delta = \dfrac{(\ln\ln X)^2}{6\ln X}$, для остаточного члена формулы (7) имеем оценку:

$$R = \frac{X}{\varphi(D)}\,e^{-(\ln\ln X)^2/7}\;. \quad \blacksquare$$

Литература

1. Линник Ю.В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах / Ю.В. Линник. – Л.:Издательство ЛГУ, 1961.
2. Постников А.Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа // Изв. АН СССР, Серия математическая. – 1955. – 19. – С.11-16.
3. Линник Ю.В., Барбан М.Б., Чудаков Н.Г. О простых числах в арифметической прогрессии с разностью, равной степени простого числа // Acta arithm. – 1964. – 9;4. – С.375-390.
4. Петечук М.М. Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью,равной степени простого нечетного числа // Докл. АН СССР, Серия математическая. – 1979. – 43;4. – С.892-908.
5. Карацуба А.А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // Докл. АН СССР, Серия математическая. – 1970. – 192;4. – С.724-727.
6. Прахар К. Распределение простых чисел /. К. Пхакар. – М.: Мир, 1967.
7. Чубариков В.Н. Уточнение границы нулей L-рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа // Вестник Московского университета. – 1973. – 2. – С.46-52.
8. Iwaniec H., Kowalsky E. Analytic number theory / H. Iwaniec, E. Kowalsky. – American Mathematical Society, Colloquium Publications. – 2004. – 53.
9. Линник Ю.В. Теория чисел. L-функции и дисперсионный метод / Ю.В. Линник. – Л.: Наука,1980.
10. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел, 2-е изд. / А.А. Карацуба. – М.: Наука, 1983.
11. Виноградов А.И. О числах с малыми простыми делителями // Докл. АН СССР, Серия математическая. – 1956. – 19;4. – С.683-686.
12. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм / И.М. Виноградов. – М.: Наука, 1976.

ON DISTRIBUTION OF PRIME NUMBERS IN AN ARITHMETIC PROGRESSION WITH PRIME-POWER DIFFERENCE

S.A. Gritsenko, M.V. Shevtsova

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia,
e-mail: gritsenko@bsu.edu.ru, shevtsova@bsu.edu.ru

Abstract. The asymptotic formula of the number of primes not exceeding the fixed value X and are contained in arithmetic progression with the difference $D = p_0^n$ where $p_0 \geq 3$ is the fixed prime number and $D \leq X^{3/8} e^{-(\ln \ln X)^2}$ is obtained.

Keywords: distribution of prime numbers, arithmetic progression, plan of the ternary problem solution, estimation of character sums over prime numbers.

УДК 517.518.32

О КОНСТАНТАХ РИССА ДЛЯ СИСТЕМ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ СДВИГОВ ФУНКЦИИ ГАУССА

М.В. Журавлев

Воронежский государственный университет,
Воронеж, Россия, e-mail: soracul@bk.ru

Аннотация. В работе показано, что отношение верхней и нижней констант Рисса для системы целочисленных сдвигов функции Гаусса быстро растёт при стремлении дисперсии к бесконечности. При переходе от функции Гаусса к интерполяционной функции Лагранжа отношение констант Рисса стремится к двум, хотя система целочисленных сдвигов этой функции в этом пределе становится ортонормированной.

Ключевые слова: константы Рисса, функция Лагранжа, функция Гаусса, тета-функция Якоби.

1. Обозначения и определения

Пусть даны функции $\varphi_k(x) \in L_2(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}$.

Определение 1. *Функции $\varphi_k(x)$ образуют систему Рисса с константами A и B, если для любого $c \in l_2$ выполнена двусторонняя оценка* [1, 2]

$$A\|c\|_{l_2}^2 \le \| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_k(x)\|_{L_2}^2 \le B\|c\|_{l_2}^2 \ , \tag{1}$$

где нормы задаются обычным образом:

$$\|c\|_{l_2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2, \quad \|f\|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \, .$$

Величина A в двойном неравенстве (1) *называется нижней, а B – верхней константами Рисса. Если система функций ортонормирована, то A и B равны* 1.

Пусть $\varphi_k(x)$ представляют собой целочисленные сдвиги одной функции $\varphi(x)$, т.е.

$$\varphi_k(x) = \varphi(x-k), \qquad k \in \mathbb{Z} \, .$$

Определение 2. *Функция $g(x)$, являющаяся линейной комбинацией $\varphi_k(x)$, называется функцией Лагранжа (узловой функцией), если для нее выполняются равенства*

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \varphi(x-k), \quad g(m) = \delta_{0m}, \qquad m \in \mathbb{Z} \, . \tag{2}$$

В дальнейшем нам понадобится тета-функция Якоби

$$\Theta_3(t,q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2ikt}\,, \qquad |q|<1\,,$$

и связанное с ней преобразование Пуассона [3, 4]:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-a(x+\pi m)^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2}{a}\right) e^{2imx}. \tag{3}$$

2. Формулировка основных результатов

В случае целочисленных сдвигов функции Гаусса константы Рисса могут быть найдены аналитически с помощью тета-функции Якоби.

Теорема 1. *Для системы функций* $\varphi_k(x) = \exp(-(x-k)^2/2\sigma^2)$ *константы Рисса вычисляются по формулам:*

$$A = \sigma\sqrt{\pi}\;\Theta_3(\pi/2; q_1)\,, \qquad B = \sigma\sqrt{\pi}\;\Theta_3(0; q_1)\,, \qquad q_1 = \exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}\right)\,. \tag{4}$$

Заметим, что константы Рисса зависят от параметра σ, причем нижняя константа очень быстро убывает с ростом σ. Например, при $\sigma = 2$ она имеет порядок 10^{-16}. Если же перейти от функции Гаусса к функции Лагранжа $g(x)$, то справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Для системы функций* $g_k(x) = g(x-k)$ *константы Рисса задаются формулами:*

$$A = \min_{0\le\xi\le 2\pi} P(\xi)\,, \qquad B = \max_{0\le\xi\le 2\pi} P(\xi)\,, \tag{5}$$

где 2π*-периодическая функция* $P(\xi)$ *задается формулой*

$$P(\xi) = \frac{\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2(\xi+2\pi m)^2)}{\left[\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(\xi+2\pi k)^2\right)\right]^2}\,.$$

Известно, что при $\sigma \to +\infty$ система функций $g_k(x)$ переходит в ортонормированную систему $\sin c(\pi(x-k))$ [5]. Но естественное предположение о стремлении констант Рисса к общему пределу оказывается неверным.

Теорема 3. *Пусть величины* $A = A(\sigma)$ *и* $B = B(\sigma)$ *заданы формулами* (5). *Тогда*

В таблице 1 приведены значения констант Рисса при разных σ. В случае функции Лагранжа значения A и B при $\sigma \ge 2$ фактически стабилизируются на пределе точности вычислений (например, в случае использования переменных типа extended в языке Delphi, одинаковыми оказываются первые 17 значащих цифр). Сами расчеты проводились с помощью преобразования Пуассона (3).

Таблица 1

Значения констант Рисса

σ	Функции Гаусса			Функции Лагранжа		
	A	B	B/A	A	B	B/A
0.2	0.353	0.356	1.01	0.353	0.356	1.008
0.4	0.415	1.009	2.43	0.498	0.852	1.711
0.6	0.130	2.262	17.46	0.499	0.997	1.998
1.0	$6.450 \cdot 10^{-4}$	6.283	$9.67 \cdot 10^{3}$	0.499	0.999	2
2.0	$3.597 \cdot 10^{-16}$	25.132	$6.98 \cdot 10^{16}$	0.500	1.000	2
3.0	$2.996 \cdot 10^{-37}$	56.548	$1.88 \cdot 10^{38}$	0.500	1.000	2
4.0	$5.276 \cdot 10^{-67}$	100.53	$1.91 \cdot 10^{68}$	0.500	1.000	2
5.0	$2.184 \cdot 10^{-105}$	157.08	$7.19 \cdot 10^{106}$	0.500	1.000	2

Аналогичные численные результаты для коэффициентов функции Лагранжа, построенной с помощью функции Гаусса, были описаны ранее в работе [6].

3. Доказательства теорем

Для доказательства теоремы 1 применим преобразование Фурье, задаваемое формулой

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx\,,$$

к линейной комбинации функций

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x-k)\,, \qquad \varphi(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

В силу равенства Парсеваля $\|\widehat{f}\|_{L_2}^2 = \|f\|_{L_2}^2$ и соотношения $\widehat{\varphi}(\xi) = \sigma \exp(-\sigma^2\xi^2/2)$ имеем:

$$\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x-k)\|_{L_2}^2 = \|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \sigma \exp(-\sigma^2\xi^2/2) e^{-ik\xi}\|_{L_2}^2 =$$

$$= \|\sigma \exp(-\sigma^2\xi^2/2) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi}\|_{L_2}^2 =$$

$$= \sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2\xi^2)\, |\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi}|^2 d\xi\,.$$

Разбив интеграл по всей оси на сумму интегралов по отрезкам $[2\pi m, 2\pi m+1]$, $m \in \mathbb{Z}$, и сделав замену $\xi = 2\pi m + t$, получим, что

$$\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x-k)\|_{L_2}^2 = \sigma^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int\limits_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} \exp(-\sigma^2\xi^2)\, |\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi}|^2 d\xi =$$

$$= \sigma^2 \int\limits_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2(t+2\pi m)^2) \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikt}|^2 dt\,.$$

Возможность перестановки порядка суммирования и интегрирования в этой и последующих выкладках обусловлена быстрой сходимостью рядов с функциями Гаусса. Применив преобразование Пуассона (3), где $a = 4\sigma^2$ и $x = \frac{t}{2}$, получим, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2(t+2\pi m)^2) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2}{4\sigma^2}\right) e^{imt}\,.$$

Таким образом:

$$\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x-k)\|_{L_2}^2 = \sigma^2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2}{4\sigma^2}\right) e^{imt} \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikt}|^2 dt =$$

$$= \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{2\pi} \Theta_3\left(\frac{t}{2}; q_1\right) \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikt}|^2 dt\,,$$

где параметр тета-функции $q_1 = \exp\left(-(4\sigma^2)^{-1}\right)$. Своего максимума тета-функция достигает при $t = 0$, а минимума – при $t = \pi$. С учетом того, что

$$\int\limits_0^{2\pi} \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikt}|^2 dt = 2\pi \|c\|_{l_2}^2\,, \tag{6}$$

получим оценки

$$\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x-k)\|_{L_2}^2 \le \sigma\sqrt{\pi}\ \Theta_3(0; q_1)\, \|c\|_{l_2}^2\,,$$

$$\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x-k)\|_{L_2}^2 \ge \sigma\sqrt{\pi}\ \Theta_3\left(\frac{\pi}{2}; q_1\right) \|c\|_{l_2}^2\,.$$

Отсюда следует справедливость формул (4). Теорема доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Выпишем образ Фурье функции Лагранжа (2)

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \varphi(x-k) e^{-ix\xi} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}\right) e^{-ix\xi} dx =$$

$$= \sigma \exp\left(-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{-ik\xi}\,.$$

Снова воспользуемся равенством Парсеваля

$$\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g_k(x)\|_{L_2}^2 = \|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \sigma \exp\left(-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right) \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l e^{-il\xi} e^{-ik\xi}\|_{L_2}^2 =$$

$$= \|\sigma \exp\left(-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l e^{-il\xi}\|_{L_2}^2 =$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2\xi^2) \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l e^{-il\xi}|^2 d\xi\,.$$

Разбив, как и при доказательстве теоремы 1, интеграл на сумму интегралов по отрезкам $[2\pi m, 2\pi m+1]$, сделав замену $\xi = 2\pi m + t$ и применив преобразование Пуассона, получим, что

$$\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g_k(x)\|_{L_2}^2 = \sigma^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} \exp(-\sigma^2\xi^2) \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l e^{-il\xi}|^2 d\xi =$$

$$= \sigma^2 \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2(t+2\pi m)^2) \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikt} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l e^{-ilt}|^2 dt =$$

$$= \sigma^2 \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2}{4\sigma^2}\right) e^{imt} \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikt} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l e^{-ilt}|^2 dt\,.$$

Введем вспомогательные ряды Фурье (в литературе используются также термины символ или маска [1, с. 23], [2, с. 10]):

$$G(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{-ikt}\,,$$

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) e^{-ikt} = \Theta_3\left(\frac{t}{2}; q_2\right)\,, \quad q_2 = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)\,,$$

для которых равенство (2) может быть записано в следующем виде [2, с. 168], [7, с. 152]:

$$\Phi(t)G(t) = 1\,.$$

Выражая $G(t)$ через $\Phi(t)$, получим:

$$\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g_k(x)\|_{L_2}^2 = \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2}{4\sigma^2}\right) e^{imt} \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikt}|^2 \; |G(t)|^2 dt =$$

$$= \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2}{4\sigma^2}\right) e^{imt} \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikt}|^2 \; |\Phi(t)|^{-2} dt =$$

$$= \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2}{4\sigma^2}\right) e^{imt}}{\left|\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) e^{-ikt}\right|^2} \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikt}\right|^2 dt\,.$$

Снова используем преобразование Пуассона (3):

$$\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g_k(x)\|_{L_2}^2 =$$

$$= \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} (2\sigma\sqrt{\pi}) \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2(\xi+2\pi m)^2)}{2\pi\sigma^2 \left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2(\xi+2\pi k)^2}{2}\right)\right)^2} \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi}\right|^2 d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2(\xi+2\pi m)^2)}{\left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(\xi+2\pi k)^2\right)\right)^2} \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi}\right|^2 d\xi\,.$$

Если ввести обозначение

$$P(\xi) = \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2(\xi+2\pi m)^2)}{\left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2(\xi+2\pi k)^2)/2\right)^2}\,,$$

то с учетом (6), получим следующую двустороннюю оценку

$$\min_{0\le\xi\le 2\pi} P(\xi)\ \|c\|_{l_2}^2 \le \|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g_k(x)\|_{L_2}^2 \le \max_{0\le\xi\le 2\pi} P(\xi)\ \|c\|_{l_2}^2\,,$$

что завершает доказательство теоремы 2.

Для доказательства теоремы 3 обозначим

$$\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(\xi+2\pi k)^2\right) = \alpha_k\,.$$

Тогда

$$P(\xi) = \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} (\alpha_m)^2}{\left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\right)^2}\,.$$

Оценка сверху $P(\xi) < 1$ следует из положительности α_k и очевидного неравенства

$$\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m\right)^2 > \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha_k)^2 .$$

Покажем теперь, что $\lim\limits_{\sigma\to\infty} P(0) = 1$. Для этого достаточно заметить, что $\alpha_0 \gg \alpha_k$ при всех $k \neq 0$. Следовательно, верхняя константа Рисса стремится к единице.

Так как функция $P(\xi)$ – чётная, 2π-периодическая и монотонно убывает по ξ на отрезке $[0, \pi]$, то

$$\min_{[0,\,2\pi]} P(\xi) = P(\pi) .$$

В этом случае $\alpha_0 = \alpha_{-1}$, а все другие $\alpha_k \ll \alpha_0$. Поэтому

$$P(\pi) \approx \frac{\alpha_0^2 + \alpha_{-1}^2}{(\alpha_0 + \alpha_{-1})^2} = \frac{2\alpha_0^2}{4\alpha_0^2} = \frac{1}{2} ,$$

что дает предельное значение нижней константы Рисса. Таким образом, теорема 3 доказана.

Литература

1. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков / И.Я. Новиков. – М.: Физматлит, 2005. – 616 с.
2. Чуи Ч. Введение в вейвлеты / Ч. Чуи. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
3. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Часть вторая: трансцендентные функции / Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 516 с.
4. Мамфорд Д. Лекции о тета-функциях / Д. Мамфорд. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
5. Shclumprecht Th., Sivakumar N. On the sapling and recovery of bandlimited functions via scattered translates of the Gaussian // arXiv:0803.4344v1 [math.CA] 30 Mar 2008. – 29 p.
6. Журавлев М.В., Минин Л.А., Ситник С.М. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета. – 2009. – 13(68); Выпуск 17/2. – С.89-99.
7. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations / AMS Mathematical Surveys and Monographs. vol. 141 / V. Maz'ya, G. Schmidt. – 2007. – 350 p.

ON RIESZ CONSTANTS FOR SYSTEMS OF INTEGER SHIFTS OF GAUSS FUNCTIONS

M.V. Zhuravlev

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: vnukov@bsu.edu.ru
Voronezh State University,
Voronezh, Russsia, e-mail: soracul@bk.ru

Abstract. It is proved that ratio of upper and lower Riesz constants for a system of integer shifts of Gauss function increases fast, if dispersion tends to infinity. For Lagrange function the limit of ratio of Riesz constants is equal to two, although a system of integer shifts becomes almost orthogonal.

Key words: Riesz constants, Lagrange function, Gaussian function, Jacobi Theta-function.

УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

ОБ ОДНОМ ПРИНЦИПЕ КОМПАКТНОСТИ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР[1)]

А.М. Мейрманов, Р.Н. Зимин

Белгородский государственный университет,
308007, г.Белгород, ул.Студенческая, 14, e-mail: Meirmanov@bsu.edu.ru

Аннотация. Доказывается принцип сильной компактности в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega_T)$ последовательности функций $\{c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t);\varepsilon>0\}$, ограниченной в пространстве $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$, при выполнении условия ограниченности последовательности $\{\partial(\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})\,c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t))/\partial t;\varepsilon>0\}$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2\left((0,T);\,\mathbb{W}_2^{-1}(\Omega)\right)$.

Ключевые слова: компактность, слабая компактность, ограниченная последовательность, двухмасштабная сходимость.

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченная область с липшицевой границей Γ, $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$, $\varepsilon>0$ – малый параметр. Настоящая работа посвящена доказательству нового принципа сильной компактности в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega_T)$ последовательности функций $\{c^{(\varepsilon)}\}$, ограниченной в пространстве $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$, где $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v)_{\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)}=\int_{\Omega_T}(uv+\nabla u\cdot\nabla v)\,d\boldsymbol{x}\,dt\,.$$

До настоящего времени были известны результаты о такой компактности, при дополнительном требовании гладкости по переменной $t\in(0,T)$.

Примером такого условия может послужить следующее: последовательность производных $\{\partial c^{(\varepsilon)}/\partial t\}$, $\varepsilon\to0$ ограничена в негативном пространстве $\boldsymbol{L}_2\left((0,T);\,\mathbb{W}_2^{-1}(\Omega)\right)$, сопряженном пространству $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$. Здесь, согласно [1],

$$\boldsymbol{L}_p(0,T;X)=\Big\{f:f\text{ – измеримое отображение }[0,T]\to X,\left(\int_0^T\|f(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p}<\infty$$

$$\text{при }1\leqslant p<\infty,\ \sup_{t\in(0,T)}\operatorname{ess}\|f(t)\|_X<\infty\text{ при }p=\infty\Big\}\,,$$

X – банахово пространство, а норма пространства $\mathbb{W}_2^{-1}(\Omega)$ определяется следующим образом

$$\|v\|_{\mathbb{W}_2^{-1}(\Omega)}=\sup_{u\in W\,:\,\|u\|_{\mathbb{W}_2^1(\Omega)}\leq1}|(u,\,v)|\,,$$

[1]Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009-2013 годы (госконтракт ḱ 02.740.11.0613).

где в правой части для простоты записи под W мы подразумеваем $\overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(\Omega)$ – подпространство $\mathbb{W}_2^1(\Omega)$, состоящее из тех его элементов, которые обращаются в нуль на границе $\partial\Omega$.

В задачах усреднения такое условие зачастую невыполнимо, но, как правило, всегда выполнено более слабое условие ограниченности в этом пространстве последовательности $\{\partial(\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t))/\partial t;\varepsilon>0\}$, где $\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})=\chi(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$ и $\chi(\boldsymbol{y})$ – 1-периодическая по переменной $\boldsymbol{y}$, $y\in\mathbb{R}^n$ функция. А именно, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть последовательность $\{c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t);\varepsilon>0\}$ ограничена в пространстве $\boldsymbol{L}_\infty\big((0,T);\boldsymbol{L}_2(\Omega)\big)\cap\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$, а последовательность $\{\partial(\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t))/\partial t;\varepsilon>0\}$ ограничена в пространстве $\boldsymbol{L}_2\left((0,T);\,\overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^{-1}(\Omega)\right)$, где $\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})=\chi(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ и $\chi(\boldsymbol{y})$ – 1-периодическая по $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ функция такая, что*

$$\langle\,\chi\,\rangle_Y=\int_Y\chi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=m\neq0\,,$$

Y – единичный куб в $\mathbb{R}^n$. Тогда из последовательности $\{c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t);\varepsilon>0\}$ можно выделить ограниченную подпоследовательность, сильно сходящуюся в $\boldsymbol{L}_2(\Omega_T)$.

□ Согласно [2] (переходя, если это необходимо, к подпоследовательности) можно считать, что последовательность $\{c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t);\varepsilon>0\}$ сходится двухмасштабно и слабо в $\boldsymbol{L}_2(\Omega_T)$ к функции $c(\boldsymbol{x},t)$. То есть, для произвольной 1-периодической по переменной $\boldsymbol{y}$ гладкой функции $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$

$$\int\limits_{\Omega_T}c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon,t)d\boldsymbol{x}dt\to\iint\limits_{\Omega_T\,Y}c(\boldsymbol{x},t)\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}dt=\int\limits_{\Omega_T}c(\boldsymbol{x},t)\langle\,\varphi\,\rangle_Y d\boldsymbol{x}dt\,. \qquad (1)$$

Более того, можно считать что последовательность $\{c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t);\varepsilon>0\}$ сходится слабо в $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ к той же самой функции $c(\boldsymbol{x},t)$ и $c(\boldsymbol{x},t)\in\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$.

Если функция $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon,t)=\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})\eta(t)\psi(\boldsymbol{x})$, то условия гладкости можно ослабить и считать, что $\chi(\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{L}^2(Y)$, $\eta\in\overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(0,T)$ и $\psi\in\overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(\Omega)$. Полагая в (1)

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon,t)=\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})\eta(t)\psi(\boldsymbol{x})$$

имеем

$$\int_{\Omega_T}c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})\eta(t)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}dt\to\int_{\Omega_T}m\,c(\boldsymbol{x},t)\eta(t)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}dt\,.$$

Пусть

$$f_\psi^{(\varepsilon)}(t)=\int_\Omega\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\,,$$

$$f_\psi(t)=\int_\Omega m\,c(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\,.$$

Тогда последнее соотношение означает, что

$$\int_0^T \eta(t) f_\psi^{(\varepsilon)}(t)\,dt \to \int_0^T \eta(t) f_\psi(t)\,dt, \tag{2}$$

для произвольных функций $\eta \in \boldsymbol{L}_2(0,T)$ и $\psi \in \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(\Omega)$.

Лемма 1. *Для почти всех $t \in (0,T)$ имеет место*

$$f_\psi^{(\varepsilon)}(t) \to f_\psi(t) \text{ при } \varepsilon \to 0\,.$$

□ По условию теоремы

$$\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \in \boldsymbol{L}_2\left((0,T); \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^{-1}(\Omega)\right),$$

что означает выполнение равенства

$$\int_{\Omega_T} \frac{d\varphi(t)}{dt}\, \chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})\, c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\, \psi(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}dt = \int_{\Omega_T} \varphi(t)\, \boldsymbol{F}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t) \cdot \nabla\psi(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}dt \tag{3}$$

для произвольных функций $\varphi \in \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(0,T)$ и $\psi \in \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(\Omega)$, где функции $\boldsymbol{F}^{(\varepsilon)}$ равномерно ограничены по малому параметру ε в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega_T)$:

$$\int_{\Omega_T} |\boldsymbol{F}^{(\varepsilon)}|^2 d\boldsymbol{x}dt \leqslant F_0^2\,.$$

Если положить

$$g^{(\varepsilon)}(t) = -\int_\Omega \boldsymbol{F}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t) \cdot \nabla\psi(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}\,,$$

$$\int_0^T |g^{(\varepsilon)}|^2 dt \leqslant F_0^2\, \|\psi\|_{2,\Omega}^2 = M_\psi^2\,,$$

то тождество (3) примет вид

$$\int_0^T \left(f_\psi^{(\varepsilon)}(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} + \varphi(t) g^{(\varepsilon)}(t) \right) dt = 0\,. \tag{4}$$

Следовательно, согласно [3], функции $f_\psi^{(\varepsilon)}(t)$ обладают обобщенными производными по времени $g^{(\varepsilon)}(t)$ и справедливо представление

$$f_\psi^{(\varepsilon)}(t) = f_\psi^{(\varepsilon)}(0) + \int_0^t g^{(\varepsilon)}(\tau) d\tau\,.$$

В частности,

$$|f_\psi^{(\varepsilon)}(t)| \leqslant M_\psi\,, \qquad |f_\psi^{(\varepsilon)}(t_1) - f_\psi^{(\varepsilon)}(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} g^{(\varepsilon)}(\tau) d\tau \right| \leqslant M_\psi\, |\, t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}}\,. \tag{5}$$

Пусть $Q = \{t_1, \ldots, t_k, \ldots\}$ счётное всюду плотное множество на [0,T]. Диагональным процессом выбираем подпоследовательность $\{f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t); m \in \mathbb{N}\}$ такую, что

$$f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t_k) \to \widehat{f}_\psi(t_k)\,, \quad \text{при} \quad t_k \in Q\,.$$

В силу неравенства (5)

$$\begin{gathered} |\widehat{f}_\psi(t_k)| \leqslant M_\psi, \\ |\widehat{f}_\psi(t_k) - \widehat{f}_\psi(t_m)| \leqslant M_\psi\, |\, t_k - t_m|^{\frac{1}{2}}\,, \end{gathered} \tag{6}$$

для произвольных t_k, $t_m \in Q$. То есть, существует функция $\overline{f}_\psi(t)$ – продолжение функции $\widehat{f}_\psi(t)$ на весь отрезок [0,T], такая что

$$\begin{gathered} \overline{f}_\psi(t_k) = \widehat{f}_\psi(t_k), \quad \text{при} \quad t_k \in Q\,, \\ |\overline{f}_\psi(t)| \leqslant M_\psi\,, \\ |\,\overline{f}_\psi(t) - \overline{f}_\psi(\tau)| \leqslant M_\psi\, |\, t - \tau|^{\frac{1}{2}}\,. \end{gathered} \tag{7}$$

Покажем теперь, что последовательность $\{f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t); m \in \mathbb{N}\}$ сходится поточечно к функции $\overline{f}_\psi(t)$ при всех $t \in (0, T)$:

$$f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t) \to \overline{f}_\psi(t), \qquad \forall\, t \in (0, T)\,. \tag{8}$$

Пусть $t_0 \in (0, T)$. Тогда для произвольного $\delta > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |\, f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t_0) - \overline{f}_\psi(t_0)| \leqslant |\, f_\psi^{\varepsilon_m}(t_0) - f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t_k)| + |\, f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t_k) - \overline{f}_\psi(t_k)| + \\ + |\,\overline{f}_\psi(t_k) - \overline{f}_\psi(t_0)| \leqslant 2\, M_\psi\, |\, t_0 - t_k|^{\frac{1}{2}} + |\, f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t_k) - \overline{f}_\psi(t_k)|\,. \end{aligned}$$

Выбирая t_k из условия

$$2\, M_\psi\, |\, t_0 - t_k|^{\frac{1}{2}} < \frac{\delta}{2}\,,$$

и уже для фиксированного k выбирая ε_0 из условия

$$|\, f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t_k) - \overline{f}_\psi(t_k)| < \frac{\delta}{2}\,, \qquad \text{при} \qquad \varepsilon_m < \varepsilon_0\,,$$

приходим к неравенству

$$|\, f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t_0) - \overline{f}_\psi(t_0)| < \delta\,, \qquad \text{при} \qquad \varepsilon_m < \varepsilon_0\,,$$

доказывающему наше утверждение.

Таким образом,

$$\int_0^T \eta(t) f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t)\, dt \to \int_0^T \eta(t) \overline{f}_\psi(t) dt\,.$$

С другой стороны, согласно (2),

$$\int_0^T \eta(t) f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t)\,dt \to \int_0^T \eta(t) f_\psi(t)\,dt\,.$$

В силу произвольного выбора функции $\eta(t)$ получим, что

$$f_\psi(t) = \overline{f}_\psi(t), \quad \text{для почти всех } t \in [0,T]\,.$$

Следовательно, (8) можно переписать как предельное соотношение

$$\int_\Omega \chi^{(\varepsilon_m)}(\boldsymbol{x}) c^{(\varepsilon_m)}(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \to \int_\Omega m\, c(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\,,$$

которое выполняется при почти всех $t \in (0,T)$ и при всех $\psi \in \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(\Omega)$. В силу единственности предела, последнее соотношение выполняется для всей последовательности $\{c^{(\varepsilon)}\}$:

$$f_\psi^{(\varepsilon)}(t) = \int_\Omega \chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}) c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \to \int_\Omega m\, c(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = f_\psi(t)\,. \quad \blacksquare \tag{9}$$

Покажем теперь, что последовательность $\{c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t_0); \varepsilon > 0\}$ (с точностью до некоторой подпоследовательности) сходится слабо в $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ при почти всех $t_0 \in (0,T)$ к функции $c(\boldsymbol{x},t_0)$. Для этого воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 2. *Из последовательности $\{\varepsilon > 0\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\varepsilon_k; k \in \mathbb{N}\}$ такую, что*

$$\lim_{\varepsilon_k \to 0} \varepsilon_k^2 \int_\Omega |\nabla c^{(\varepsilon_k)}(\boldsymbol{x},t_0)|^2 d\boldsymbol{x} = 0\,, \quad \text{для почти всех } t_0 \in (0,T)\,. \tag{10}$$

$\square$ В самом деле, из ограниченности последовательности $\{\nabla c^{(\varepsilon)}; \varepsilon > 0\}$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega_T)$ следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \int_{\Omega_T} |\nabla c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)|^2 d\boldsymbol{x}dt = 0\,. \tag{11}$$

Положим

$$u^{(\varepsilon)}(t) = \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)|^2 d\boldsymbol{x}\,.$$

Тогда равенство (11) означает, что последовательность $\{u^{(\varepsilon)}; \varepsilon > 0\}$ сходится сильно к нулю в пространстве $\boldsymbol{L}_1(0,T)$. В силу известных теорем анализа [4], существует подпоследовательность $\{\varepsilon_k; k \in \mathbb{N}\}$ из $\{\varepsilon > 0\}$ такая, что последовательность $\{u^{(\varepsilon_k)}(t_0); k \in \mathbb{N}\}$ сходится к нулю (поточечно) при почти всех $t_0 \in (0,T)$,

$$u^{(\varepsilon_k)}(t_0) \to 0 \quad \text{при почти всех} \quad t_0 \in (0,T)\,. \quad \blacksquare \tag{12}$$

Пусть $G \subset (0,T)$ – множество полной меры в $(0,T)$, для которого выполнены условия (9), (12) и условие

$$\int_\Omega |\nabla c(\boldsymbol{x},t_0)|^2 dx \leqslant N(t_0) < \infty, \ t_0 \in G. \tag{13}$$

Такой выбор множества G возможен в силу известных свойств суммируемых функций [4], [5].

Рассмотрим теперь последовательность $\{c^{(\varepsilon)}; \varepsilon > 0\}$ на сечении $t = t_0 \in G$. По условию теоремы эта последовательность ограничена в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$. Следовательно существует подпоследовательность $\{c^{(\varepsilon_k)}(\boldsymbol{x},t_0); k \in \mathbb{N}\}$, сходящаяся двухмасштабно в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ к 1 – периодической по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $\overline{C}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t_0)$. Далее воспользуемся определением двухмасштабной сходимости. Имеем

$$\varepsilon_k \int_\Omega \nabla c^{(\varepsilon_k)}(\boldsymbol{x},t_0) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}/\varepsilon_k)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} =$$

$$= -\varepsilon_k \int_\Omega c^{(\varepsilon_k)}(\boldsymbol{x},t_0)\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}/\varepsilon_k) \cdot \nabla\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_\Omega c^{(\varepsilon_k)}(\boldsymbol{x},t_0)\big(\nabla_y \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}/\varepsilon_k)\big)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

для произвольной периодической функции $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{W}_2^1(Y)$ и произвольной функции $\psi \in \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(\Omega)$.

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon_k \to 0$ имеем с учетом (10):

$$\int_\Omega \psi(\boldsymbol{x})\Big(\int_Y \overline{C}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t_0)\,\nabla_y \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\Big)d\boldsymbol{x} = 0,$$

что эквивалентно равенству

$$\overline{C}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t_0) = \overline{c}(\boldsymbol{x},t_0). \tag{14}$$

Таким образом, подпоследовательность $\{c^{(\varepsilon_k)}(\boldsymbol{x},t_0); k \in \mathbb{N}\}$ сходится двухмасштабно в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ к функции $\overline{c}(\boldsymbol{x},t_0)$. В частности, подпоследовательность $\{\chi^{(\varepsilon_k)}(\boldsymbol{x})\, c^{(\varepsilon_k)}(\boldsymbol{x},t_0); k \in \mathbb{N}\}$, где $\chi^{(\varepsilon_k)}(\boldsymbol{x}) = \chi(\boldsymbol{x}/\varepsilon_k)$, сходится слабо в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ к функции $m\,\overline{c}(\boldsymbol{x},t_0)$. С другой стороны, эта же самая подпоследовательность в силу соотношений (9) сходится слабо в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ к функции $m\,c(\boldsymbol{x},t_0)$. Единственность слабого предела влечет равенство

$$\overline{c}(\boldsymbol{x},t_0) = c(\boldsymbol{x},t_0)\,.$$

Более того, это же равенство показывает, что вся последовательность $\{c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t_0); \varepsilon > 0\}$ сходится слабо в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ к функции $c(\boldsymbol{x},t_0)$.

Нам осталось показать, что данная последовательность $\{c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t_0); \varepsilon > 0\}$ сходится сильно в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ к функции $c(\boldsymbol{x},t_0)$. Для этого покажем, что последова-

тельность $\{\nabla c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t_0);\varepsilon>0\}$ ограничена в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$. В самом деле, имеем

$$\int_\Omega \nabla c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t_0)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t_0)\big(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\big)d\boldsymbol{x} \to$$

$$-\int_\Omega c(\boldsymbol{x},t_0)\big(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\big)d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \nabla c(\boldsymbol{x},t_0)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

Это значит, что последовательность $\{\nabla c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t_0);\varepsilon>0\}$ сходится слабо в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ к функции $\nabla c(\boldsymbol{x},t_0)$ и, следовательно, ограничена в этом пространстве [4]. Последний факт и вполне непрерывное вложение пространства $\mathbb{W}_2^1(\Omega)$ в пространство $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ (см. [1]) доказывает наше утверждение. ■

Литература

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972.
2. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 1989. – 20. – c.608-623.
3. Adams R.A. Sobolev spaces / R. A. Adams. – N.Y.: Academic press, 1975.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2004.
5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной // И.П. Натансон. – М.: Наука, 1974.

SOME COMPACTNESS RESULT FOR PERIODIC STRUCTURES

A.M. Meirmanov, R.N. Zimin

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: Meirmanov@bsu.edu.ru

Abstract. The strong compactness principle of the function sequence $\{c^{(\varepsilon)};\varepsilon>0\}$ in the space $\boldsymbol{L}_2(\Omega_T)$, being bounded in the space $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ is proved when the sequence $\{\partial(\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t))/\partial t;$ $\varepsilon>0\}$ is bounded in the space $\boldsymbol{L}_2\big((0,T);\,\mathbb{W}_2^{-1}(\Omega)\big)$.

Key words: compactness, weak compactness, bounded sequence, two-scale convergence.

УДК 511.512

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТАМИ

Л.Н. Куртова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: lmoskalenko@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе рассмотрена аддитивная задача теории чисел о числе решений диофантова уравнения,содержащего линейную комбинацию 4-х квадратов. Используя круговой метод, а также на основе оценки для суммы слагаемых в виде сумм Клостермана, получена асимптотическая формула для числа решений.

Ключевые слова: аддитивные задачи теории чисел, число решений, асимптотическая формула, суммы Клостермана.

Введение

В 1927 году А.Е. Ингам поставил и решил элементарным методом задачи получения асимптотических формул для числа решений уравнений:

$$x_1x_2 + x_3x_4 = n\,;$$

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 1\,, \quad x_1x_2 \le n\,. \tag{1}$$

Эти задачи получили название аддитивные проблемы делителей.

В 1931 году Т. Эстерман [1] для числа решений $J(n)$ уравнения (1) круговым методом вывел асимптотическую формулу

$$J(n) = nP_2(\ln\, n) + R(n)\,,$$

где $P_2(t)$ – многочлен степени 2, а $R(n) = O(n^{11/12}\ln^{17/3} n)$.

Оценка остаточного члена этой формулы уточнялась многими авторами. Так в 1979 году Д.И. Исмоилов, развивая метод Т. Эстермана, доказал, что $R(n) = O(n^{5/6+\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малая постоянная. Практически одновременно с Исмоиловым другим методом ту же оценку остатка получил Д.Р. Хиз-Браун.

В 1982 году Ж.-М. Дезуйе и Х. Иванец [2], использую оценку суммы сумм Клостермана, доказали, что $R(n) = O(n^{2/3+\varepsilon})$.

В настоящей статье решается задача, родственная проблеме делителей Ингама. Пусть

$$I(n,h) = \sum_{m_1^2+m_2^2-k_1^2-k_2^2=h} e^{-\frac{m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2}{n}}\,. \tag{2}$$

Основной результат изложен в теореме.

Теорема. *Пусть ε – произвольное положительное число, $n \in N$, h – натуральное число, такое, что $h \equiv 0 \pmod 4$, $h \ll n^{\varepsilon}$. Справедлива асимптотическая формула*

$$I(n,h) = \frac{\pi^2 n}{2} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} G^2(q,l,0) G^2(q,-l,0) + O(n^{7/12+\varepsilon}). \qquad (3)$$

Здесь $G(q,l,0) = \sum_{s=1}^{q} \exp(2\pi i l s^2/q)$ – *сумма Гаусса. Сумма особого ряда асимтотической формулы положительна.*

В работе будут использоваться следующие обозначения:

$G(q,l,m) = \sum_{s=1}^{q} \exp(2\pi i(ls^2+ms)/q)$ – сумма Гаусса;

$S(u,v,q) = \sum_{\substack{1\le l\le q,\\(l,q)=1}} \exp(2\pi i(ul+vl^*)/q)$ – сумма Клостермана, где $ll^* \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$;

$d(n)$ – число представлений n в виде произведения двух множителей;

$\chi(m;\delta,0) = \begin{cases} 1, & \text{при } m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ \delta), \\ 0, & \text{в противном случае}; \end{cases}$

$N = [\sqrt{n}]$;

$\frac{l''}{q''} < \frac{l}{q} < \frac{l'}{q'}$ – соседние дроби Фарея, лежащие на отрезке $\left[-\frac{1}{N}, 1-\frac{1}{N}\right)$, $1 \le l$, $q \le N$, $q' \le N$, $q'' \le N$.

1. Вспомогательные леммы

Лемма 1 (Функциональное уравнение для тета-ряда). *Пусть* $\mathrm{Re}\tau > 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\theta(\tau,\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi\tau(n+\alpha)^2)$. *Тогда*

$$\theta(\tau^{-1},\alpha) = \sqrt{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi\tau n^2 + 2\pi i n\alpha\right).$$

□ Доказательство см. [3, глава I]. ■

Лемма 2. *Пусть h – натуральное число, такое, что $h \ll n^{\varepsilon}$. Тогда справедливо равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i h x}}{n^{-2}+4\pi^2 x^2} dx = \frac{n}{2} + O(n^{\varepsilon}).$$

□ Доказательство следует из ([4], глава VI) и условия $h \ll n^{\varepsilon}$. ■

Лемма 3 (Оценка суммы Клостермана). *Пусть* $S(u,v,q) = \sum\limits_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} \exp(2\pi i(ul+vl^*)/q)$ *– сумма Клостермана, где* $ll^* \equiv 1(\mod q)$. *Справедлива оценка*

$$|S(u,v,q)| \le d(q)q^{1/2}(u,v,q)^{1/2}\,.$$

□ Доказательство см. в [5]. ■

Лемма 4 (Явные формулы для суммы Гаусса).

1. Если $(q_1,q_2)=1$, *то*

$$G(q_1q_2,l,m) = G(q_1,lq_2,m)G(q_2,lq_1,m)\,.$$

2. Если $(q,2l)=1$, *то*

$$G(q,l,m) = \exp\left(-\frac{2\pi i}{q}(4l)^*m^2\right)\left(\frac{l}{q}\right)G(q,1,0)\,,$$

где $(4l)^*4l \equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$ *и* $\left(\frac{l}{q}\right)$ *– символ Якоби.*

3. Если $(q,2)=1$, *то*

$$G(q,1,0) = \begin{cases} \sqrt{q}, & \text{если } q \equiv 1(\mod 4)\,,\\ i\sqrt{q}, & \text{если } q \equiv 3(\mod 4)\,. \end{cases}$$

4.Если $(l,2)=1$, *то*

$$G(2^{\alpha},l,0) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha = 1,\\ 2^{\alpha/2}(1+i^l), & \text{если } \alpha \text{ – четное число},\\ 2^{(\alpha+1)/2}\exp\left(\frac{2\pi i l}{8}\right), & \text{если } \alpha > 1 \text{ – нечетное число}\,. \end{cases}$$

5. Пусть A,B *– целые числа,* $(A,2)=1$. *Тогда*

$$G(2,A,B) = 2\chi(B;2,1);$$

$$G(2^{\alpha},A,B) = \chi(B;2,0)\exp\left(-\frac{2\pi i}{2^{\alpha}}A^*\frac{B^2}{4}\right)G(2^{\alpha},A,0)\,,$$

где $\alpha \geqslant 2$, $A^*A \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2^{\alpha})$.

□ Доказательство см. [6]. ■

Лемма 5 (Оценка суммы сумм Клостермана). *Пусть T, U, V, ε – положительные действительные числа, a_u и b_v – последовательности комплексных чисел, $S(u,v,q)$ – сумма Клостермана. Тогда*

$$\left|\sum_{U\leqslant u\leqslant 2U} a_u \sum_{V\leqslant v\leqslant 2V} b_v \sum_{\substack{q\leqslant T,\\ q\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)}} \frac{1}{q} S(u,v,q)\right| \leqslant cT^{\varepsilon}\left(\frac{1}{p}(UV)^{1/2} + (UVT)^{1/6}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{U\leqslant u\leqslant 2U}|a_u|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{V\leqslant v\leqslant 2V}|b_v|^2\right)^{1/2}.$$

□ Доказательство см. в [7, с. 234]. ■

2. Доказательство теоремы

1. Запишем $I(n,h)$ в виде интеграла

$$I(n,h) = \int_0^1 S_1(\alpha)S_2(\alpha)e^{-2\pi i\alpha h}d\alpha\,,$$

где

$$S_1(\alpha) = \sum_{m_1,\,m_2=-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i\alpha - n^{-1})(m_1^2+m_2^2)}\,, \qquad S_2(\alpha) = \sum_{k_1,\,k_2=-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi i\alpha + n^{-1})(k_1^2+k_2^2)}\,.$$

Пусть $N = [\sqrt{n}]$ и $\xi_{0,1} = \left[-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right)$. Разобьем промежуток $\left[-\frac{1}{N}, 1-\frac{1}{N}\right)$ числами ряда Фарея, отвечающего параметру N (см. [8, с. 22-23]). Пусть $\frac{l''}{q''} < \frac{l}{q} < \frac{l'}{q'}$ – соседние дроби Фарея, $1 \le l,\ q \le N$. Определим промежутки

$$\xi_{l,q} = \left[\frac{l}{q} - \frac{1}{q(q+q'')}, \frac{l}{q} + \frac{1}{q(q+q')}\right).$$

Из свойств дробей Фарея следует, что

$$\left[-\frac{1}{N}, 1-\frac{1}{N}\right) = \bigcup_{q=1}^{N}\ \bigcup_{\substack{l=0,\\ (l,q)=1}}^{q-1} \xi_{l,q}\,,$$

причем $\xi_{l,q}\cap\xi_{l',q'} = \varnothing$ при $(l,q)\neq(l',q')$.

Тогда

$$I(n,h)=\sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q}\int\limits_{\xi_{l,q}} S_1(\alpha)S_2(\alpha)e^{-2\pi i\alpha h}d\alpha= \tag{4}$$

$$=\sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i\frac{hl}{q}}\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} S_1\left(\frac{l}{q}+x\right)S_2\left(\frac{l}{q}+x\right)e^{-2\pi ihx}dx\,.$$

2. Преобразуем сумму

$$S_1\left(\frac{l}{q}+x\right)=\sum_{m_1,\,m_2=-\infty}^{\infty} e^{(-n^{-1}+2\pi il/q+2\pi ix)(m_1^2+m_2^2)}\,.$$

Справедливы следующие равенства

$$\sum_{m_1,\,m_2=-\infty}^{\infty} e^{(-n^{-1}+2\pi il/q+2\pi ix)(m_1^2+m_2^2)}=\sum_{s_1=1}^{q}e^{2\pi ils_1^2/q}\sum_{\substack{m_1:\\ m_1\equiv s_1(\mathrm{mod}\ q)}} e^{(-n^{-1}+2\pi ix)m_1^2}\times$$

$$\times\sum_{s_2=1}^{q}e^{2\pi ils_2^2/q}\sum_{\substack{m_2:\\ m_2\equiv s_2(\mathrm{mod}\ q)}} e^{(-n^{-1}+2\pi ix)m_2^2}=$$

$$=\sum_{s_1=1}^{q}e^{2\pi ils_1^2/q}\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\exp((-n^{-1}+2\pi ix)q^2(m_1+s_1/q)^2)\times$$

$$\times\sum_{s_2=1}^{q}e^{2\pi ils_2^2/q}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}\exp((-n^{-1}+2\pi ix)q^2(m_2+s_2/q)^2)=$$

$$=\sum_{s_1=1}^{q}e^{2\pi ils_1^2/q}\,\theta\left(\frac{q^2}{\pi}\left(\frac{1}{n}-2\pi ix\right),\frac{s_1}{q}\right)\sum_{s_2=1}^{q}e^{2\pi ils_2^2/q}\,\theta\left(\frac{q^2}{\pi}\left(\frac{1}{n}-2\pi ix\right),\frac{s_2}{q}\right).$$

Используя лемму 1, функции $\theta\left(\frac{q^2}{\pi}\left(\frac{1}{n}-2\pi ix\right),\frac{s_i}{q}\right)$, $i=1,2$ перепишем в виде:

$$\theta\left(\frac{q^2}{\pi}\left(\frac{1}{n}-2\pi ix\right),\frac{s_i}{q}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{q^2\left(n^{-1}-2\pi ix\right)}}\sum_{m_i=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{m_i^2}{n^{-1}-2\pi ix}+2\pi im_i\frac{s_i}{q}\right),\quad i=1,2\,.$$

Тогда для $S_1(l/q+x)$ справедливо равенство

$$S_1\left(\frac{l}{q}+x\right)=\frac{\pi}{q^2(n^{-1}-2\pi ix)}\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{m_1^2}{n^{-1}-2\pi ix}\right)\sum_{s_1=1}^{q}e^{2\pi i(ls_1^2+m_1s_1)/q}\times$$

$$\times \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{m_2^2}{n^{-1}-2\pi i x}\right)\sum_{s_2=1}^{q} e^{2\pi i(ls_2^2+m_2 s_2)/q}\,.$$

Выделим слагаемое $m_1=0, m_2=0$. Тогда $S_1(l/q+x)$ можно записать в виде

$$S_1\left(\frac{l}{q}+x\right)=\varphi_1+\Phi_1\,,$$

где

$$\varphi_1=\frac{\pi}{q^2(n^{-1}-2\pi i x)}\,G^2(q,l,0)$$

и

$$\Phi_1=\frac{\pi}{q^2(n^{-1}-2\pi i x)}\sum_{\substack{m_1=-\infty,\\ m_1\neq 0}}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{m_1^2}{n^{-1}-2\pi i x}\right)G(q,l,m_1)\times$$

$$\times\sum_{\substack{m_2=-\infty,\\ m_2\neq 0}}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{m_2^2}{n^{-1}-2\pi i x}\right)G(q,l,m_2)\,,$$

$G(q,l,m_i), i=1,2$ – сумма Гаусса. Аналогично получаем равенство для $S_2(l/q+x)$:

$$S_2\left(\frac{l}{q}+x\right)=\varphi_2+\Phi_2\,,$$

где

$$\varphi_2=\frac{\pi}{q^2(n^{-1}+2\pi i x)}\,G^2(q,-l,0)$$

и

$$\Phi_2=\frac{\pi}{q^2(n^{-1}+2\pi i x)}\sum_{\substack{k_1=-\infty,\\ k_1\neq 0}}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{k_1^2}{n^{-1}+2\pi i x}\right)G(q,-l,k_1)\times$$

$$\times\sum_{\substack{k_2=-\infty,\\ k_2\neq 0}}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{k_2^2}{n^{-1}+2\pi i x}\right)G(q,-l,k_2)\,.$$

3. Ввиду (4) и представлений для функций $S_1(l/q+x)$ и $S_2(l/q+x)$, имеем

$$I(n,h)=I_1+I_2+I_3+I_4\,,$$

где

$$I_1=\pi^2\sum_{q\le N}\frac{1}{q^4}\sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q}\,G^2(q,l,0)\;G^2(q,-l,0)\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}\frac{e^{-2\pi i h x}dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2}\,,$$

$$I_2=\sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q}\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}\varphi_1\,\Phi_2\,e^{-2\pi i h x}dx\,,$$

$$I_3 = \sum_{q\le N} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi ihl/q} \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \varphi_2\, \Phi_1\, e^{-2\pi ihx} dx\ ,$$

$$I_4 = \sum_{q\le N} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi ihl/q} \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \Phi_1\, \Phi_2\, e^{-2\pi ihx} dx\ .$$

Интеграл I_1 вычислим асимптотически, а интегралы I_2, I_3, I_4 оценим сверху.

4. Начнем с I_1. Разобьем интеграл $\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}$ на разность интегралов

$$\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q'')]^{-1}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{-[q(q+q'')]^{-1}} - \int\limits_{[q(q+q'')]^{-1}}^{\infty}\ .$$

Соответственно этому разбиению получаем

$$I_1 = I_{1,1} - I_{1,2} - I_{1,3}\,.$$

Вычислим асимптотически $I_{1,1}$. В силу леммы 2 имеем

$$I_{1,1} = \pi^2 \sum_{q\le N} \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi ihl/q}\, G^2(q,l,0)\ G^2(q,-l,0)\,(n/2 + O(n^{\varepsilon})) =$$

$$= \Sigma_1 + O(\Sigma_2)\,.$$

Оценим вклад остатка Σ_2. Для этого запишем произведение квадратов сумм Гаусса $G^2(q,l,0)G^2(q,-l,0)$ в явном виде. Используя равенства из леммы 4 и учитывая, что $(l,q)=1$, имеем:

1) если $(q,2)=1$, то

$$G(q,l,0) = C_1(q)\left(\frac{l}{q}\right)\sqrt{q}\ ,$$

где

$$C_1(q) = \begin{cases} 1, & \text{если } q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)\,, \\ i, & \text{если } q \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)\,; \end{cases}$$

2) если $(q,2)=2$, $q=2^{\alpha}r_2$, $(2^{\alpha},r_2)=1$, то

$$G(q,l,0) = C_1(r_2)C_2(\alpha, lr_2)\left(\frac{2^{\alpha}l}{r_2}\right)\sqrt{q}\,,$$

где

$$C_2(\alpha, lr_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha = 1, \\ (1 + i^{lr_2}), & \text{если } \alpha \text{ – четное число}, \\ \sqrt{2}\,\exp(2\pi i l r_2/8), & \text{если } \alpha > 1 \text{ – нечетное число}. \end{cases}$$

Можно утверждать, что имеет место соотношение

$$G^2(q, l, 0)G^2(q, -l, 0) = C_3(q)q^2\,,$$

где

$$C_3(q) = \begin{cases} 0, & \text{если } q \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)\,, \\ 1, & \text{если } (q, 2) = 1\,, \\ 4, & \text{если } q \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)\,. \end{cases}$$

Тогда

$$\Sigma_2 \ll n^{\varepsilon} \sum_{q \le N} \frac{1}{q^2} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} = n^{\varepsilon} \sum_{q \le N} \frac{1}{q^2} \sum_{s|(q,h)} s\mu\left(\frac{q}{s}\right) \ll n^{\varepsilon}\,.$$

Прежде чем вычислять вклад $I_{1,3}$, заметим, что

$$\left| \int\limits_{[q(q+q')]^{-1}}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i h x} dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \right| \ll \int\limits_{[qq']^{-1}}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \ll qq' \ll qN\,,$$

так как $q' \leqslant N$. Учитывая явную формулу для произведения квадратов сумм Гаусса, будем иметь

$$I_{1,3} \ll N^{1+\varepsilon} \sum_{q \le N} \frac{1}{q} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} = N^{1+\varepsilon} \sum_{q \le N} \frac{1}{q} \sum_{s\,|(q,h)} s\mu\left(\frac{q}{s}\right) \ll N^{1+\varepsilon}\,.$$

Интеграл $I_{1,2}$ оценивается аналогично.

Проведем оценку для суммы

$$R = n \sum_{q > N} \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q}\, G^2(q, l, 0)\; G^2(q, -l, 0)\,.$$

Имеем

$$R \ll n^{1+\varepsilon} \sum_{q > N} \frac{1}{q^2} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} = n^{1+\varepsilon} \sum_{q > N} \frac{1}{q^2} \sum_{s\,|(q,h)} s\mu\left(\frac{q}{s}\right) \ll n^{1/2+\varepsilon}\,.$$

Таким образом,

$$I_1 = \frac{\pi^2 n}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q}\, G^2(q,l,0)\; G^2(q,-l,0) + O(n^{1/2+\varepsilon})\,.$$

5. Оценка I_2, I_3, I_4 проводится одинаково. Приведём полное доказательство для I_4.

$$I_4 = \sum_{q\le N} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \Phi_1\, \Phi_2\, e^{-2\pi i h x} dx\,.$$

Вместо Φ_1, Φ_2 подставим их значения, полученные в пункте 2. В результате имеем

$$I_4 = \pi^2 \sum_{\substack{m_1=-\infty,\\ m_1\neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{m_2=-\infty,\\ m_2\neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{k_1=-\infty,\\ k_1\neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{k_2=-\infty,\\ k_2\neq 0}}^{\infty} \sum_{q\le N} q^{-4} \times$$

$$\times \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} G(q,l,m_1)\, G(q,l,m_2)\, G(q,-l,k_1)\, G(q,-l,k_2) \;\times$$

$$\times \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{\exp\left(-2\pi i h x\right) \exp\left(-\dfrac{\pi^2}{q^2}\cdot\dfrac{m_1^2+m_2^2}{n^{-1}-2\pi i x}\right) \exp\left(-\dfrac{\pi^2}{q^2}\cdot\dfrac{k_1^2+k_2^2}{n^{-1}+2\pi i x}\right)}{n^{-2}+4\pi^2 x^2}\, dx\,.$$

В дальнейшем будем использовать следующее обозначение для повторных операций суммирования

$$\sum_{\substack{m_1=-\infty,\\ m_1\neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{m_2=-\infty,\\ m_2\neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{k_1=-\infty,\\ k_1\neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{k_2=-\infty,\\ k_2\neq 0}}^{\infty} (\cdot) = \sum_{\substack{m_1,\,m_2\\ k_1,\,k_2}} (\cdot)\quad .$$

Запишем в явном виде суммы Гаусса, используя равенства из леммы 4. Возможны 3 случая:

1) если $(q,2)=1$, то

$$G(q,l,m_1) = C_1(q) \left(\frac{l}{q}\right) \sqrt{q}\, \exp\left(-2\pi i\, \frac{(4l)^*}{q}\, m_1^2\right)\,,$$

где $4l(4l)^* \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$;

2) если $(q,2)=2$, $q=2r_2$, $(2,r_2)=1$, то

$$G(q,l,m_1) = C_1(r_2)\sqrt{2}\,\chi(m_1;2,1) \left(\frac{2l}{r_2}\right) \sqrt{q}\, \exp\left(-2\pi i \frac{(8l)^*}{r_2} m_1^2\right)\,,$$

где $8l(8l)^* \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r_2)$.

3)если $(q,2)=2$, $q=2^{\alpha}r_2$, $\alpha\geqslant 2$, $(2,r_2)=1$, то

$$G(q,l,m_1)=C_1(r_2)\,C_2(\alpha,lr_2)\;\chi(m_1;2,0)\left(\frac{2^{\alpha}l}{r_2}\right)\sqrt{q}\,\exp\left(-2\pi i\frac{(l)^*}{q}\frac{m_1^2}{4}\right),$$

где $ll^*\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$. Константы $C_1(q)$, $C_2(\alpha,lr_2)$ были определены выше.

Тогда можем утверждать, что

$$G(q,l,m_1)\,G(q,l,m_2)\,G(q,-l,k_1)\,G(q,-l,k_2)=$$

$$=C_4(q,m_1,m_2,k_1,k_2)\,q^2\,e^{-2\pi i\,\frac{l^*}{q}\,C_5(q,m_1,m_2,k_1,k_2)},$$

где

$$C_4(q,m_1,m_2,k_1,k_2)=$$

$$\begin{cases}1, & \text{если } (q,2)=1,\\ 4\chi(m_1;2,1)\chi(m_2;2,1)\chi(k_1;2,1)\chi(k_2;2,1)\exp\left(\frac{i\pi}{4}(m_1^2+m_2^2-k_1^2-k_2^2)\right), & \text{если } (q,2^{\alpha})=2,\\ 4\chi(m_1;2,0)\chi(m_2;2,0)\chi(k_1;2,0)\chi(k_2;2,0), & \text{если } (q,2^{\alpha})>2;\end{cases}$$

$$C_5(q,m_1,m_2,k_1,k_2)=\begin{cases}4^*(m_1^2+m_2^2-k_1^2-k_2^2), & \text{если } (q,2)=1,\\ (m_1^2+m_2^2-k_1^2-k_2^2)/4, & \text{если } (q,2)=2\,.\end{cases}$$

Тогда

$$I_4=\pi^2\sum_{\substack{m_1,\,m_2\\ k_1,\,k_2}}\;\sum_{q\leq N}C_4(q,m_1,m_2,k_1,k_2)\,q^{-2}S(-h,-C_5(q,m_1,m_2,k_1,k_2),q)\;\times$$

$$\times\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}\frac{\exp(-2\pi ihx)\,\exp\left(-\dfrac{\pi^2}{q^2}\cdot\dfrac{m_1^2+m_2^2}{n^{-1}-2\pi ix}-\dfrac{\pi^2}{q^2}\cdot\dfrac{k_1^2+k_2^2}{n^{-1}+2\pi ix}\right)}{n^{-2}+4\pi^2x^2}\,dx$$

Разобьем интеграл $\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}$ на сумму интегралов:

$$\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}=\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{-[q(q+N)]^{-1}}+\int\limits_{-[q(q+N)]^{-1}}^{0}+\int\limits_{0}^{[q(q+N)]^{-1}}+\int\limits_{[q(q+N)]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}.$$

Соответственно этому разбиению получаем

$$I_4=I_{4,1}+I_{4,2}+I_{4,3}+I_{4,4}\,.$$

6. $I_{4,2}$ и $I_{4,3}$ оцениваются одинаковы. Все рассуждения проведем для $I_{4,3}$. Пусть θ – сколь угодно малое положительное число, тогда

$$I_{4,3} = \sum_{q\le n^{1/2-\theta}} \int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} + \sum_{q\le n^{1/2-\theta}} \int\limits_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[q(q+N)]^{-1}} + \sum_{n^{1/2-\theta}<q\le N} \int\limits_0^{[q(q+N)]^{-1}} =$$

$$= \Sigma_{41} + \Sigma_{42} + \Sigma_{43}\,.$$

Сумму Σ_{41} оценим сверху. Учитывая, что $|C_4(q,m_1,m_2,k_1,k_2)| \le 4$, будем иметь

$$\Sigma_{41} \ll \sum_{\substack{m_1,\,m_2\\ k_1,\,k_2}} \sum_{q\le n^{1/2-\theta}} q^{-2} |\,S(-h,-C_5(q,m_1,m_2,k_1,k_2),q)| \times$$

$$\times \int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \exp\left(-\frac{\pi^2 n(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)}{q^2(1+4\pi^2x^2n^2)}\right) \frac{dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2}\,.$$

Сумму Клостермана $S(-h,-C_5(q,m_1,m_2,k_1,k_2),q)$ оценим, используя лемму 3. В результате, получим

$$\Sigma_{41} \ll n^{3\varepsilon} \sum_{\substack{m_1,\,m_2\\ k_1,\,k_2}} \sum_{q\le n^{1/2-\theta}} q^{-3/2} \int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \exp\left(-\frac{\pi^2 n(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)}{q^2(1+4\pi^2x^2n^2)}\right) \frac{dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2}\,.$$

Так как $q \leqslant n^{1/2-\theta}, 0 \leqslant x \leqslant [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$, то

$$\exp\left(-\frac{\pi^2 n m_i^2}{q^2(1+4\pi^2x^2n^2)}\right) \le e^{-cn^{2\theta}}\,, \quad \exp\left(-\frac{\pi^2 n k_i^2}{q^2(1+4\pi^2x^2n^2)}\right) \le e^{-cn^{2\theta}}\,,$$

где c – постоянная, $i=1,2$. Тогда

$$\sum_{\substack{m_i=-\infty,\\ m_i\ne 0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n m_i^2}{q^2(1+4\pi^2x^2n^2)}\right) = O\left(e^{-cn^{2\theta}}\right)\,,$$

$$\sum_{\substack{k_i=-\infty,\\ k_i\ne 0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n\, k_i^2}{q^2(1+4\pi^2x^2n^2)}\right) = O\left(e^{-cn^{2\theta}}\right)\,.$$

Кроме того,

$$\int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2} \ll \int\limits_0^{2\pi[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dt}{n^{-2}+t^2} \ll n^{\frac{3}{2}-\theta} q^{-1}\,.$$

Следовательно,

$$\Sigma_{41} \ll n^{3/2-\theta+3\varepsilon} e^{-cn^{2\theta}} \sum_{q \le n^{1/2-\theta}} q^{-5/2} \ll n^{7/12+\varepsilon} .$$

7. Перейдем к оценке Σ_{42}.

$$\Sigma_{42} = \pi^2 \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ k_1, k_2}} \sum_{q \le n^{1/2-\theta}} \frac{1}{q} C_4(q, m_1, m_2, k_1, k_2)\, S(-h, -C_5(q, m_1, m_2, k_1, k_2), q) \times$$

$$\times \frac{1}{q} \int\limits_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[q(q+N)]^{-1}} \frac{\exp(-2\pi i h x)\, \exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2} \cdot \frac{m_1^2 + m_2^2}{n^{-1} - 2\pi i x} - \frac{\pi^2}{q^2} \cdot \frac{k_1^2 + k_2^2}{n^{-1} + 2\pi i x}\right)}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2}\, dx$$

Введем функцию

$$f(q, n, h, m_1, m_2, k_1, k_2) =$$

$$= \frac{1}{q} \int\limits_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[q(q+N)]^{-1}} \frac{\exp(-2\pi i h x)\, \exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2} \cdot \frac{m_1^2 + m_2^2}{n^{-1} - 2\pi i x} - \frac{\pi^2}{q^2} \cdot \frac{k_1^2 + k_2^2}{n^{-1} + 2\pi i x}\right)}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2}\, dx .$$

Сумму по q перепишем в виде:

$$\sum_q = \sum_{q \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)} + \sum_{\substack{q \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2), \\ q \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)}} + \sum_{q \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 .$$

1) Пусть $q \not\equiv 0(\mod 2)$. Тогда

$$C_4(q, m_1, m_2, k_1, k_2) = 1 , \qquad C_5(q, m_1, m_2, k_1, k_2) = 4^*(m_1^2 + m_2^2 - k_1^2 - k_2^2) .$$

По условию $4 \mid h$, обозначим через $h_1 = h/4$, h_1 – целое число, $v_1 = m_1^2 + m_2^2 - k_1^2 - k_2^2$. Тогда справедливо неравенство

$$\Sigma_1 \ll \left| \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ k_1, k_2}} \sum_{\substack{q \le n^{1/2-\theta}, \\ q \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)}} \frac{1}{q}\, S(-h_1, -v_1, q) f(q, n, h, m_1, m_2, k_1, k_2) \right| \ll$$

$$\ll \sum_{i=1}^{2} \left| \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ k_1, k_2}} \sum_{\substack{q \le n^{1/2-\theta}, \\ q \equiv 0 (\mathrm{mod}\ i)}} \frac{1}{q}\, S(-h_1, -v_1, q)\, f(q, n, h, m_1, m_2, k_1, k_2) \right| .$$

К каждой из сумм по q применим преобразование Абеля, имеем

$$-\int_0^{n^{1/2-\theta}} \Bigg(\sum_{\substack{t\le q,\\ t\equiv 0 (\mathrm{mod}\ i)}} \frac{1}{t}\, S(-h_1,-v_1,t) \Bigg) f_q'(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2)\, dq \ +$$

$$+\ f(n^{1/2-\theta},n,h,m_1,m_2,k_1,k_2) \sum_{\substack{q\le n^{1/2-\theta},\\ q\equiv 0 (\mathrm{mod}\ i)}} \frac{1}{q}\, S(-h_1,-v_1,q)\,, \quad i=1,2\,.$$

Тогда

$$\Sigma_1 \ll \sum_{i=1}^{2} \int_0^{n^{1/2-\theta}} \Bigg| \sum_{\substack{m_1,m_2\\ k_1,k_2}} f_q'(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2) \sum_{\substack{t\le q,\\ t\equiv 0 (\mathrm{mod}\ i)}} \frac{1}{t}\, S(-h_1,-v_1,t) \Bigg| dq \ +$$

$$+\sum_{i=1}^{2} \Bigg| \sum_{\substack{m_1,m_2\\ k_1,k_2}} f(n^{1/2-\theta},n,h,m_1,m_2,k_1,k_2) \sum_{\substack{q\le n^{1/2-\theta},\\ q\equiv 0 (\mathrm{mod}\ i)}} \frac{1}{q}\, S(-h_1,-v_1,q) \Bigg|\,.$$

Вычислим производную от функции $f(q,n,m_1,m_2,k_1,k_2)$ по переменной q и оценим тривиальным образом функцию и найденную производную. В результате, получаем

$$f(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2) = O\left(e^{-C(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)} n^{1/2+\theta}\right)\,,$$

$$f_q'(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2) = O\left(e^{-C(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)} \left(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2\right) \frac{n^{1/2+\theta}}{q}\right)\,,$$

где C – постоянная.

Положив в лемме 5 входящие в её формулировки величины равными $u=-h_1, v=-v_1, |\,a_u|=1, |\,b_v| = e^{-C(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)} n^{1/2+\theta}, U=V=n^{\varepsilon}, T=n^{1/2-\theta}$ и p равным одному из чисел 1 или 2, заключаем, что

$$\sum_{\substack{m_1,m_2\\ k_1,k_2}} f(n^{1/2-\theta},n,h,m_1,m_2,k_1,k_2) \sum_{\substack{q\le n^{1/2-\theta},\\ q\equiv 0 (\mathrm{mod}\ i)}} \frac{1}{q}\, S(-h_1,-v_1,q) \ll n^{7/12+11\varepsilon/6+5\theta/6-\varepsilon\theta}\,.$$

Аналогичные рассуждения дают для функции f_q' оценку

$$\sum_{\substack{m_1,m_2\\ k_1,k_2}} f_q'(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2) \sum_{\substack{t\le q,\\ t\equiv 0 (\mathrm{mod}\ i)}} \frac{1}{t}\, S(-h_1,-v_1,t) \ll q^{-5/6+\varepsilon} n^{1/2+\theta+4\varepsilon/3}\,.$$

Проинтегрировав последнюю оценку по q и выбрав в качестве $\varepsilon = 11\varepsilon/6 + 5\theta/6 - \varepsilon\theta$, в итоге получим $\Sigma_1 = O(n^{7/12+\varepsilon})$.

2) Пусть $q \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2), q \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$. Тогда

$$C_4(q, m_1, m_2, k_1, k_2) = 4\,\chi(m_1; 2, 1)\,\chi(m_2; 2, 1)\,\chi(k_1; 2, 1)\,\chi(k_2; 2, 1)\,e^{\pi i \frac{m_1^2+m_2^2-k_1^2-k_2^2}{4}}\ ,$$

$$C_5(q, m_1, m_2, k_1, k_2) = (m_1^2 + m_2^2 - k_1^2 - k_2^2)/4\ .$$

Обозначим через $b_v = C_4(q, m_1, m_2, k_1, k_2)$, $v = C_5(q, m_1, m_2, k_1, k_2)$ – целое число. Тогда справедливо неравенство

$$\Sigma_2 \ll \sum_{\substack{i=2,\\ i=4}} \left| \sum_{\substack{m_1, m_2\\ k_1, k_2}} b_v \sum_{\substack{q \le n^{1/2-\theta},\\ q \equiv 0(\mathrm{mod}\ i)}} \frac{1}{q}\, S(-h, -v, q) f(q, n, h, m_1,\ m_2, k_1, k_2) \right| .$$

К суммам по q применим преобразование Абеля и далее используем лемму 5. Все рассуждения аналогичны тем, что проводились для случая 1). В результате можем утверждать, что $\Sigma_2 = O\left(n^{7/12+\varepsilon}\right)$.

3) Пусть $q \equiv (0 \bmod 4)$. Тогда

$$C_4(q, m_1, m_2, k_1, k_2) = 4\,\chi(m_1; 2, 0)\,\chi(m_2; 2, 0)\,\chi(k_1; 2, 0)\,\chi(k_2; 2, 0)\ ,$$

$$C_5(q, m_1, m_2, k_1, k_2) = (m_1^2 + m_2^2 - k_1^2 - k_2^2)/4\ .$$

Обозначим через $b_v = C_4(q, m_1, m_2, k_1, k_2)$, $v = C_5(q, m_1, m_2, k_1, k_2)$ – целое число. Тогда справедливо неравенство

$$\Sigma_3 \ll \left| \sum_{\substack{m_1, m_2\\ k_1, k_2}} b_v \sum_{\substack{q \le n^{1/2-\theta},\\ q \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)}} \frac{1}{q}\, S(-h, -v, q) f(q, n, h, m_1, m_2, k_1, k_2) \right| .$$

При оценке этой суммы действуем также, как и в случае 1). В результату, получаем $\Sigma_3 = O\left(n^{7/12+\varepsilon}\right)$. Это приводит к оценке $\Sigma_{42} = O\left(n^{7/12+\varepsilon}\right)$.

8. Проведем оценку Σ_{43}. Рассуждения и оценки будут аналогичны тем, что проводились в пункте 7 для суммы Σ_{42} с тем лишь отличием, что в качестве функции $f(q, n, h, m_1, m_2, k_1, k_2)$ выбираем

$$f(q, n, h, m_1, m_2, k_1, k_2) =$$

$$= \frac{1}{q} \int\limits_0^{[q(q+N)]^{-1}} \frac{\exp(-2\pi i h x) \exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2} \cdot \frac{m_1^2 + m_2^2}{n^{-1} - 2\pi i x} - \frac{\pi^2}{q^2} \cdot \frac{k_1^2 + k_2^2}{n^{-1} + 2\pi i x}\right)}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2}\, dx\ ,$$

причём

$$f(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2) = O\left(e^{-C(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)}\frac{n}{q}\right),$$

$$f'_q(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2) = O\left(e^{-C\,(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)}\,(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)\frac{n}{q^2}\right),$$

где C – постоянная.

Окончательно имеем

$$I_{4,\,3} = O(n^{7/12+\varepsilon})\,.$$

9. Интегралы $I_{4,1}$ и $I_{4,4}$ оцениваются одинаково. Так для случая $I_{4,\,4}$ введем функцию

$$f(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2) =$$

$$= \frac{1}{q}\int\limits_{[q(q+N)]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{\exp(-2\pi ihx)\exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{m_1^2+m_2^2}{n^{-1}-2\pi ix}-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{k_1^2+k_2^2}{n^{-1}+2\pi ix}\right)}{n^{-2}+4\pi^2x^2}\,dx\,,$$

для которой, а также для её производной по q справедливы оценки

$$f(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2) = O\left(e^{-C(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)}N\right),$$

$$f'_q(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2) = O\left(e^{-C(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)}(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)\frac{N}{q}\right),$$

где C – постоянная. Действуя по схеме рассуждений из пункта 7, в итоге находим $I_{4,\,4} = O\left(n^{7/12+\varepsilon}\right)$.

Объединяем полученные для I_4 оценки, получаем:

$$I_4 = O\left(n^{7/12+\varepsilon}\right).$$

10. В силу проведенных выше в пп.1-9 рассуждений заключаем, что

$$I(n,h) = \frac{\pi^2 n}{2}\sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i\frac{hl}{q}}\,G^2(q,l,0)\,G^2(q,-l,0) \;+\; O(n^{7/12+\varepsilon})\,.$$

Литература

1. Esterman T. Über die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten // J. reine und ang. Math. – 1931. – 164. – P.173-182.

2. Deshouillers J.-M., Iwaniec H. An additive divisor problem // J. London Math. Soc. – 1982. – 26(2). – P.1-14.

3. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана / С.М. Воронин, А.А. Карацуба. – М.:Физматлит, 1994.

4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного: Учебное пособие для студентов механических специальностей механико-математических факультетов государственных университетов / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1958. – 678 с.

5. Estermann T. On Kloostermann's sum // Mathematika. – 1961. – 8. – P.83-86.

6. Estermann T. A new application of Hardy-Littlewood-Kloosterman method // Proc. London Math. Soc. – 1962. – 12(3). – P.425-444.

7. Deshouillers J.-M., Iwaniec, H. Kloosterman sums and fourier coefficients of cusp forms // Invent. math. – 1982. – 70. – P.219-288.

8. Виноградов И.М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов. – М.: Изд. технич. литер.,1952.

ABOUT THE SOLUTION NUMBER OF ONE EQUATION WITH SQUARES

L.N. Kurtova

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: lmoskalenko@bsu.edu.ru

Abstract. It is considered the additive problem of number theory that concerns the number of solutions of Diophantine equation that contains the linear combination of four squares. Using the circular method, the asymptotical formula of the solution number is obtained on the basis of estimate of the sum that consists of Kloosterman's sums.

Key words: additive problems of number theory, number of solution, asymptotic formula, Kloosterman's sums.

УДК 519.2+539.1

ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ В ВОЗМУЩЁННОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

А.С. Мазманишвили

Сумской государственный университет,
г. Сумы, Украина, e-mail: mazmanishvili@gmail.com

Аннотация. Рассмотрено эволюционное уравнение Шредингера с параболическим потенциалом, центр которого произвольным образом изменяется во времени.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, параболический потенциал.

1. Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается квантово-механическая задача о временнóй эволюции частицы в квадратичном потенциале, центр которого смещается произвольным образом во времени, описываемом посредством некоторая квадратично-интегрируемой функции $U(t)$. Такая постановка задачи возникает в физических задачах, например, в том случае, когда смещение $U(t)$ представляет собой траекторию случайного процесса, моделирующего искажения потенциала в процессе движения частицы. Такое положение реализуется, в частности, при изучении движения электрона достаточно большой энергии через кристалл вдоль одной из его кристаллических осей (см., например, [2, 3]). В этом случае роль времени t в изучаемой нами задачи играет глубина проникновения частицы. Функция же $U(t)$, описывающая смещение центра потенциала описывает естественные случайные искажения кристаллической решётки.

Математическая постановка задачи состоит в следующем. Пусть $U(t)$ – квадратично-интегрируемая функция и

$$V(x,t) \;=\; \frac{1}{2}m\omega^2\,[x-U(t)]^2\;, \quad m,\omega=\mathrm{const} \tag{1}$$

– изменяющийся во времени потенциал. Пусть далее $\Psi=\Psi(x,t;x_0,t_0)$ – квадратично-интегрируемая на $L_2(\mathbb{R})$ функция, которая подчинена уравнению Шредингера [1]

$$-i\hbar\,\frac{\partial\Psi}{\partial t} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2\,[x-U(t)]^2\;, \tag{2}$$

где $\hbar$ – так называемая постоянная Планка, и удовлетворяет начальному условию

$$\Psi(x,t_0,x_0,t_0) \;=\delta(x-x_0)\,. \tag{3}$$

Функция Ψ является функцией Грина для уравнения (2). С точки зрения квантовой механики эта функция представляет собой так называемую амплитуду перехода из состояния в момент $t=t_0$, характеризуемого координатой x_0, в состояние в момент t, характеризуемого координатой x.

2. Решение начально-краевой задачи

Будем искать решение уравнения (2) в виде

$$\Psi(x,t;x_0,t_0) \;=\; \exp\left(C_0(t)+C_2(t)x+C_2(t)x^2\right) \tag{4}$$

с некоторыми зависящими от времени функциями $C_0(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$ (см. [3]). Эти функции выбираются таким образом, чтобы удовлетворить уравнению Шредингера и начальному условию (3). В силу единственности решения начально-краевой задачи, построенная таким образом функция (4) будет искомым решением. Так как

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\Psi\left(\dot C_0(t)+x\dot C_1(t)+x^2\dot C_2(t)\right)\,,$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=\Psi\left(\dot C_1(t)+2x\dot C_2(t)\right)\,,$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\Psi\left[\left(\dot C_1(t)+2x\dot C_2\right)^2+2C_2(t)\right]\,,$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени t, то подстановка функции (4) в уравнение (2) приводит,

$$-i\hbar\left(\dot C_0+x\dot C_1+x^2\dot C_2(t)\right)=-\frac{\hbar^2}{2m}\left[(C_1(t)+2xC_2(t))^2+2C_2(t)\right]+\frac{1}{2}\,m\omega^2\left[x-U(t)\right]^2\,.$$

Вследствие требования тождественного совпадения получающихся в правой и левой частях уравнения квадратных трёхчленов, получаем следующую систему трёх обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $C_0(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$

$$\begin{aligned}
-i\hbar\,\dot C_0&=-\frac{\hbar^2}{2m}\left[2C_2+C_1^2\right]+\frac{1}{2}\,m\omega^2U^2(t)\,,\\
-i\hbar\,\dot C_1&=-\frac{2\hbar^2}{m}\,C_1C_2-m\omega^2U(t)\,,\\
-i\hbar\,\dot C_2&=-\frac{2\hbar^2}{m}\,C_2^2+\frac{1}{2}\,m\omega^2\,.
\end{aligned}\tag{5}$$

Начальное условие к этой системе уравнений находится сравнением Фурье-образов функции (3)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Psi(x,0)e^{-ikx}dx=e^{-ikx_0}$$

и предельного при $t\to+0$ выражения функции (4) (необходимо чтобы $C_2(t)<0$)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(C_0(t)+xC_1(t)+x^2C_2(t)\right)e^{-ikx}dx=\sqrt{\frac{\pi}{|\,C_2(t)|}}\,\exp\left(C_0(t)-\frac{(C_1(t)-ik)^2}{4|C_2(t)|}\right)\,.$$

Отсюда получаем условие

$$\lim_{t\to+0}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi}{|\,C_2(t)|}\right)+C_0(t)-\frac{(C_1(t)-ik)^2}{4|C_2(t)|}\right]=-ikx_0\,.$$

Система уравнений (5) элементарно решается виду того, что допускает расцепление искомых функций – сначала решается уравнение для $C_2(t)$ разделением переменных, затем решается линейное уравнение для $C_1(t)$ с уже найденной функцией C_2 и, наконец, интегрированием на основе найденных функций C_1 и C_2 вычисляется C_0. В результате, такой процедуры решения получаем следующее решение уравнения (2)

$$\begin{aligned}\Psi(x,t;x_0,0) \;&=\; \left(\frac{me^{i\omega t}}{\pi\hbar(e^{2i\omega t}-1)}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2-x_0^2)\right)\times\\ &\times\exp\left(-\frac{im\omega^2}{2\hbar}\int\limits_0^t U^2(\tau)\,d\tau+\frac{i\hbar}{2m}\int\limits_0^t Z^2(\tau)\,d\tau+xZ(t)\right)\times\\ &\times\exp\left(-\frac{im\omega}{\hbar(e^{2i\omega t}-1)}\left[x-x_0e^{i\omega t}-\frac{\hbar}{m}\int\limits_0^t Z(\tau)\,\exp(i\omega(t-\tau))\,d\tau\right]^2\right)\,,\end{aligned}\tag{6}$$

где

$$Z(\tau)\;=\;\frac{im\omega^2}{\hbar}\int\limits_0^\tau U(\tau')\,\exp\left(-i\omega(\tau-\tau')\right)\,d\tau'\,.\tag{7}$$

Решение $\psi(x,t)$ уравнения (2) с произвольным начальным условием $\psi(x_0,0)$ в момент $t=0$, находится на основе найденной функции Грина по формуле

$$\psi(x,t)\;=\;\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x_0,0)\,\Psi(x,t;x_0,0)\,dx_0\;,\tag{8}$$

аналогичным соотношению Смолуховского-Коломогорова-Чепмена [4, 5]. В частности, вычисляя интеграл (8) с ядром $\Psi(x,t;x_0,0)$ (6) и начальной волновой функцией

$$\psi(x_0,0)\;=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\,x^2\right)^{1/2}\,,\tag{9}$$

получим

$$\psi(x,t)\;=\;\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-i\frac{m\omega^2}{2\hbar}\,J+\frac{m\omega}{2\hbar}\left[x-\omega\int\limits_0^t U(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau\right]^2\right)\,,\tag{10}$$

где J – набег фазы результирующей волновой функции

$$J\;=\;\int\limits_0^t U^2(\tau)\,d\tau+\frac{\hbar t}{m\omega}-2x\int\limits_0^t U(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau\;+$$

$$+ \int_0^t U(\tau_1)\, \sin\omega(\tau_1 - t)\, d\tau_1 \int_0^t U(\tau_2)\, \cos\omega(\tau_2 - t)\, d\tau_2 \,.$$

Если при $t = 0$ частица находилась в состоянии с волновой функцией (9), то к моменту времени t для плотности вероятностей $p(x,t)$ найдем

$$p(x,t) \;=\; \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx_0\, \psi(x_0,0)\, \Psi(x,t;x_0,0) \right|^2 \;= \tag{11}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{m\omega}{\hbar} \left[x - \omega \int_0^t U(\tau)\, \sin(\omega(t-\tau))\, d\tau \right]^2 \right\}.$$

3. Заключение

Для того чтобы понять в чём существенно проявляется действие смещения $U(t)$ центра потенциала на временну́ю эволюцию частицы, вычислим квантовомеханическое среднее значение координаты и её дисперсии. Первый момент плотности распределения вероятностей $p(x,t)$ имеет вид

$$\langle x(t) \rangle \;=\; \omega \int_0^t U(\tau) \sin(\omega(t-\tau))\, d\tau \,, \tag{12}$$

а соответствующая ему дисперсия –

$$\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 \;=\; \frac{\hbar}{2m} \,. \tag{13}$$

Формула (13) показывает, что смещение центра потенциала не оказывает влияние на расплывание волнового пакета, дисперсия волнового пакета остаётся постоянной и независящей от $U(t)$. С другой стороны, из формулы (12) видно, что, как и в классической механике, возможно явление резонанса. Достаточно выбрать сделать функцию $U(t)$ периодической с частотой, совпадающей с собственной частотой ω, связанной с потенциалом и произойдёт линейное по времени нарастание амплитуды колебаний среднего смещения частицы. Например, при $U(t) \sim \sin\omega t$ имеем

$$\int_0^t \sin\omega\tau \sin(t-\tau)\omega\, d\tau = \frac{1}{2}(\sin\omega t - t\cos\omega t) \,.$$

То же самое происходит в общем случае, наличие гармоники с частотой ω в функции $U(t)$ приводит к неограниченному нарастанию размаха колебаний.

Литература

1. Соколов А.А., Лоскутов Ю.И., Тернов И.М. Квантовая механика / А.А. Соколов, Ю.И. Лоскутов, И.М. Тернов. – М.: Наука, 1962. – 591 с.

2. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф. Электродинамика высоких энергий в веществе / А.И. Ахиезер, Н.Ф. Шульга. – М.: Наука, 1993. – 344 с.

3. Барышевский В.Г. Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях / В.Г. Барышевский. – Минск: Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.

4. Мазманишвили А.С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач / А.С. Мазманишвили. – К.: Наукова думка, 1987. – 224 с.

5. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику / С.М. Рытов. – М.: Наука, 1979. – 404 с.

6. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миронов. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.

WAVE FUNCTIONS IN THE PERTURBED PARABOLIC POTENTIAL

Mazmanishvili A.S.

Sumy State University,
Sumy, Ukraine, e-mail: mazmanishvili@gmail.com

Abstract. The evolution Schrödinger equation with the parabolic potential is studied. The center of the potential is varied in time by an arbitrary way.

Key words: Schrödinger's equation, parabolic potential.

УДК 517.958:531.72

МОДЕЛИРОВАНИЕ БЫСТРОПРОТЕКАЮЩИХ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ УСРЕДНЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР: ДВУХСКОРОСТНОЙ КОНТИНУУМ[2)]

И.В. Некрасова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Nekrasova_i@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе рассматривается линейная система дифференциальных уравнений, описывающая совместное движение упругого пористого тела и вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей поры. В предположении периодичности структуры порового пространства и малости характерного времени процесса на основе метода двухмасштабной сходимости Нгуетсенга предлагается строгий вывод усредненных уравнений, которыми будут: система анизотропных уравнений Стокса для скорости жидкой компоненты, связанная с уравнениями акустики для перемещений твёрдой компоненты, описывающая двухскоростной континуум.

Ключевые слова: уравнения Стокса, гидравлический разрыв, двухмасштабная сходимость, усреднение периодических структур.

Введение

В настоящей работе рассматривается задача о совместном движении деформируемого упругого тела, перфорированного системой каналов (пор), заполненных жидкостью. Такие среды называются упругими пористыми средами и являются достаточно хорошим приближением реальных консолидированных грунтов. Твёрдая компонента такой среды называется скелетом грунта, а область занятая жидкостью – поровым пространством. В безразмерных (не отмеченных штрихами) переменных

$$\boldsymbol{x}' = L\boldsymbol{x}, \quad t' = \tau t, \quad \boldsymbol{w}' = \frac{L^2}{g\tau^2}\boldsymbol{w}, \quad \rho_s' = \rho_0\rho_s, \quad \rho_f' = \rho_0\rho_f, \quad \boldsymbol{F}' = g\,,$$

дифференциальные уравнения модели для безразмерного вектора перемещений $\boldsymbol{w}$ в области $\Omega \in \mathbf{R}^3$ имеют вид:

$$\bar{\rho}\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \operatorname{div}\mathbb{P} + \bar{\rho}\,\boldsymbol{F}\,, \tag{0.1}$$

$$\mathbb{P} = \bar{\chi}\,\alpha_\mu\,\mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\right) + (1-\bar{\chi})\,\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) - p\,\mathbb{I}\,, \tag{0.2}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{w} = 0, \tag{0.3}$$

$$p = \bar{\chi}\,p_f + (1-\bar{\chi})\,p_s\,. \tag{0.4}$$

[2]Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы (контракт № 02.740.11.0613)

Здесь и далее мы будем обозначать

$$\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}) = (1/2)\left(\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T\right)\,, \qquad \bar{\rho} = \bar{\chi}\,\rho_f + (1-\bar{\chi})\,\rho_s\,,$$

$\mathbb{I}$ – единичный тензор, p_f – давление жидкости, p_s – давление в твёрдом скелете, L – характерный макроскопический размер (размер рассматриваемой области), τ – характерное время процесса, ρ_f и ρ_s – средние безразмерные плотности жидкой и твёрдой фаз (отнесенные плотности воды ρ_0) соответственно, g – величина ускорения силы тяжести. Характеристическая функция порового пространства $\bar{\chi}(\boldsymbol{x})$ и вектор удельных массовых сил $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)$ считаются известными.

Заметим, что предположение о несжимаемости жидкости автоматически влечет несжимаемость твёрдого скелета, поскольку скорость звука в твёрдой среде в несколько раз больше скорости звука в жидкости. А как известно, мерой несжимаемости (сжимаемости) является скорость звука – менее сжимаемая среда обладает большей скоростью звука. В силу этого уравнения неразрывности для жидкой и твёрдой компонент среды можно записать в виде одного уравнения (0.3), справедливого всюду в области Ω.

Дифференциальные уравнения (0.1)–(0.4) означают, что скорость $\boldsymbol{v} = \partial\boldsymbol{w}/\partial t$ удовлетворяет уравнениям Стокса в поровом пространстве Ω_f, а вектор перемещений $\boldsymbol{w}$ удовлетворяет уравнениям Ламэ в твёрдом скелете Ω_s.

На границе Γ "твёрдый скелет – поровое пространство" вектор перемещений $\boldsymbol{w}$ и давление жидкости p_f удовлетворяют условиям непрерывности перемещений

$$[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{x}_0,t) = 0, \quad \boldsymbol{x}_0 \in \Gamma,\ t \geq 0 \tag{0.5}$$

и нормальных напряжений

$$[\mathbb{P}\cdot\mathbf{n}](\boldsymbol{x}_0,t) = 0\,, \quad \boldsymbol{x}_0 \in \Gamma,\ t \geq 0, \tag{0.6}$$

где $\mathbf{n}(\boldsymbol{x}_0)$ – вектор единичной нормали к границе в точке $\boldsymbol{x}_0 \in \Gamma$ и

$$[\varphi](\boldsymbol{x}_0,t) = \varphi_{(s)}(\boldsymbol{x}_0,t) - \varphi_{(f)}(\boldsymbol{x}_0,t)\,,$$

$$\varphi_{(s)}(\boldsymbol{x}_0,t) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega_s}} \varphi(\boldsymbol{x},t), \quad \varphi_{(f)}(\boldsymbol{x}_0,t) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega_f}} \varphi(\boldsymbol{x},t)\,.$$

Для простоты изложения считаем, что область Ω есть единичный куб $(0,1)\times(0,1)\times(0,1) \subset \mathbb{R}^3$.

Задача замыкается однородными начальными и граничными условиями

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0) = 0, \quad \frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{0.7}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in S_1\,, \tag{0.8}$$

$$(\mathbb{P}\cdot\mathbf{n})(\boldsymbol{x},t) = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in S_2\,, \tag{0.9}$$

где

$$S_2 = \{0 < x_1 < 1,\, 0 < x_2 < 1,\, x_3 = 1\},$$

$$\bar{S}_1 \bigcup \bar{S}_2 = S = \partial\Omega\,.$$

Безразмерные постоянные α_μ и α_λ определяются формулами

$$\alpha_\mu = \frac{2\mu\tau}{L^2\rho_0}, \quad \alpha_\lambda = \frac{2\lambda\tau^2}{L^2\rho_0},$$

где μ – вязкость жидкости, λ – упругая постоянная Ламэ.

Математическая модель (0.1)–(0.9) общепринята и содержит естественный малый параметр ε, которым является отношение среднего размера пор l к характерному размеру L рассматриваемой области:

$$\varepsilon = \frac{l}{L}\,..$$

Пусть выполнено следующее

Предположение. *Область $\Omega = (0,1)^3$ есть периодическое повторение элементарной ячейки $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$, где $Y = (0,1)^3$ и величина $1/\varepsilon$ есть целое число так, что Ω всегда содержит целое число элементарных ячеек Y^ε. Пусть Y_s есть "твёрдая" часть Y, и ее "жидкая" часть Y_f есть открытое дополнение Y_s в Y и граница $\gamma = \partial Y_f \bigcap \partial Y_s$ между "жидкой" и "твёрдой" компонентами есть липшицева поверхность.*

Поровое пространство Ω_f^ε есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_f, твёрдый скелет Ω_s^ε есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_s а граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_s^\varepsilon \bigcap \partial\Omega_f^\varepsilon$ есть периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$. Твёрдый скелет Ω_s^ε и "поровое пространство" Ω_f^ε являются связными множествами.

$$\bar{\chi}(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi\left(\boldsymbol{x}/\varepsilon\right)\,,$$

$$\bar{\rho} = \rho^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})\rho_f + (1 - \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))\rho_s\,,$$

где $\chi(\boldsymbol{y})$ – характеристическая функция Y_f в Y.

Пусть безразмерные параметры зависят от малого параметра задачи ε и существуют пределы (конечные или бесконечные)

$$\mu_0 = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \alpha_\mu(\varepsilon), \quad \lambda_0 = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \alpha_\lambda(\varepsilon)\,, \quad \lambda_1 = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{\alpha_\lambda}{\varepsilon^2}\ .$$

В настоящей работе, посредством метода двухмасштабной сходимости Нгуетсенга [4], мы исследуем предельный режим задачи (0.1)-(0.9) в случае, когда

$$0 < \mu_0 < \infty, \quad \lambda_0 = 0, \quad 0 < \lambda_1 < \infty\,,$$

Отметим, что данный случай возникает при описании быстро протекающих физических процессов таких, например, как гидро-разрыв нефтяного пласта, когда длительность процесса исчисляется долями секунд. Случай условий Дирихле был рассмотрен в [1]. Там же можно найти соответствующую библиографию.

1. Формулировка основных результатов

Существуют различные эквивалентные в смысле теории распределений формы записи уравнений (0.1) в каждой из областей Ω_f^ε и Ω_s^ε и краевых условий (0.5)–(0.6) на границе Γ^ε между поровым пространством Ω_f^ε и твёрдым скелетом Ω_s^ε. Для нас будет удобной запись в виде интегральных тождеств.

Назовем функции $\left(\boldsymbol{w}^\varepsilon,\, p^\varepsilon\right)$ обобщенным решением задачи (0.1)-(0.9), если они удовлетворяют условиям регулярности – являются элементами $L^2(\Omega_T)$ –

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon,\, \mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}^\varepsilon),\, p^\varepsilon \in L^2(\Omega_T) \tag{1.1}$$

с областью $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, граничному условию (0.8), уравнению неразрывности

$$\mathrm{div}\boldsymbol{w}^\varepsilon = 0 \tag{1.2}$$

почти всюду в области Ω_T, интегральному тождеству

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_T}\Big(\rho^\varepsilon \boldsymbol{w}^\varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} - \chi^\varepsilon \alpha_\mu D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}) - \rho^\varepsilon \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\varphi} \ + \\ + \{(1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda \mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}^\varepsilon) - p^\varepsilon \mathbb{I}\} : \mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi})\Big) d\boldsymbol{x}dt = 0\,,\end{aligned} \tag{1.3}$$

для всех гладких вектор-функций $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$ таких, что

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) = 0,\ \boldsymbol{x} \in S_1,\ t > 0; \qquad \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, T) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, T) = 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega\,.$$

Очевидно, что давление p^ε определяется с точностью до аддитивной постоянной. Фиксируем эту постоянную условием

$$\int_\Omega p^\varepsilon\, d\boldsymbol{x} = 0\,. \tag{1.4}$$

В (1.3) через $A : B$ обозначено скалярное произведение двух тензоров второго ранга, $A : B = \mathrm{tr}\,(B^* \circ A) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ji}$.

Теорема 1. *Пусть функции $\boldsymbol{F}$, $\partial \boldsymbol{F}/\partial t$ ограничены в $L^2(\Omega_T)$:*

$$\int_{\Omega_T}\left(|\boldsymbol{F}|^2 + \left|\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}\right|^2\right) d\boldsymbol{x}dt \le F^2\,.$$

Тогда при всех $\varepsilon > 0$ на произвольном интервале времени $[0, T]$ существует единственное обобщённое решение задачи (0.1)-(0.9) и справедливы оценки

$$\sqrt{\alpha_\mu}\left\|\chi^\varepsilon \mathbb{D}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\right\|_{2,\Omega} + \sqrt{\alpha_\lambda}\left\|(1-\chi^\varepsilon)\mathbb{D}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\right\|_{2,\Omega} \le C_0 F^2\,, \tag{1.5}$$

$$\sqrt{\alpha_\mu}\left\|\chi^\varepsilon\,\mathbb{D}\left(\boldsymbol{x},\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right)\right\|_{2,\Omega_T}+\left\|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{2,\Omega}+\|p^\varepsilon(t)\|_{2,\Omega}\le C_0F^2\,, \tag{1.6}$$

где C_0 не зависит от малого параметра ε и $t\in[0,T]$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда:*

1) Для функций $\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t$ существует продолжение $\boldsymbol{v}^\varepsilon$ из $\Omega_f^\varepsilon\times(0,T)$ в Ω_T и

$$\|\boldsymbol{v}^\varepsilon(t)\|_{2,\Omega}\le C_0\left\|\chi^\varepsilon\,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{2,\Omega},\quad \left\|\frac{\partial\boldsymbol{v}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{2,\Omega}\le C_0\left\|\chi^\varepsilon\,\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{2,\Omega},$$

$$\int_\Omega|\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^2\,dx\le C_0\int_\Omega\chi^\varepsilon\left|\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t})\right|^2\,dx\,,$$

$$\int_{\Omega_T}\left|\mathbb{D}\left(\boldsymbol{x},\frac{\partial\boldsymbol{v}^\varepsilon}{\partial t}\right)\right|^2\,dxdt\le C_0\int_{\Omega_T}\chi^\varepsilon\left|\mathbb{D}\left(\boldsymbol{x},\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right)\right|^2\,dxdt\,,$$

где C_0 не зависит от малого параметра ε и $t\in[0,T]$.

2) Существует подпоследовательность из $\{\varepsilon>0\}$ и 1 – периодические по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ и $P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ такие, что последовательности $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$ и $\{\partial\boldsymbol{v}^\varepsilon/\partial t\}$ сходятся сильно в $L^2(\Omega_T)$ и слабо в $L^2((0,T);W_2^1(\Omega))$ к функциям $\boldsymbol{v}$ и $\partial\boldsymbol{v}/\partial t$ соответственно, последовательности $\{\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}^\varepsilon)\}$ и $\{\mathbb{D}(x,\partial\boldsymbol{v}^\varepsilon/\partial t)\}$ сходятся двухмасштабно в $L^2(\Omega_T)$ к функциям $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v})+\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})$ и $\mathbb{D}(x,\partial\boldsymbol{v}/\partial t)+\mathbb{D}(y,\partial\boldsymbol{U}/\partial t)$ соответственно, а последовательности $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ и $\{(1-\chi^\varepsilon)\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ сходятся слабо в $L^2(\Omega_T)$ к функциям $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{u}_s$ соответственно.

3) Последовательности $\{p^\varepsilon\}$ $\{\chi^\varepsilon p^\varepsilon\}$ и $\{(1-\chi^\varepsilon)p^\varepsilon\}$ сходятся слабо в $L^2(\Omega_T)$ к функциям $p=p_f+p_s$, p_f и p_s соответственно и двухмасштабно в $L^2(\Omega_T)$ к функциям P, $\chi(\boldsymbol{y})P$ и $(1/(1-m)\big(1-\chi(\boldsymbol{y})\big)p_s(\boldsymbol{x},t)$ соответственно.

4) функция $\boldsymbol{v}$ обращается в ноль на части S_1 границы S, то есть

$$\int_0^T\int_{S_1}|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{n},t)|\,d\sigma dt\to 0\quad\text{при}\quad\delta\to 0,$$

где $\boldsymbol{n}$ – вектор единичной нормали к границе S_1 в точке $\boldsymbol{x}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда слабые и сильные пределы $\boldsymbol{u}_s$, p, p_s и $\boldsymbol{v}$ удовлетворяют в области Ω_T начально-краевой задаче, которая состоит из анизотропной системы уравнений Стокса*

$$\rho_f m\,\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\rho_s\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_s}{\partial t^2}=\operatorname{div}\tilde{\mathbb{P}}+\hat{\rho}\boldsymbol{F}\,, \tag{1.7}$$

$$\tilde{\mathbb{P}}=\mu_0\mathbb{A}_0^f:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v})+\mathbb{B}_1^f\operatorname{div}\boldsymbol{v}-p\mathbb{I}\,, \tag{1.8}$$

для жидкой компоненты, связанной с уравнением неразрывности

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}_s}{\partial t}\right)+m\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0 \tag{1.9}$$

соотношением

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial t} = (1-m)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) + \int_0^t \mathbb{B}_1^s(t-\tau)\cdot \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau\,, \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{1}{1-m}\nabla p_s(\boldsymbol{x},t) + \rho_s \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t) - \rho_s \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)$$

для твёрдой компоненты.

Дифференциальные уравнения (1.7)-(1.10) замыкаются однородными краевыми и начальными условиями

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0) = 0, \qquad \boldsymbol{x}\in\Omega;$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = 0, \quad \boldsymbol{x}\in S_1\,; \qquad (\tilde{\mathbb{P}}\cdot\mathbf{n})(\boldsymbol{x},t) = 0, \quad \boldsymbol{x}\in S_2, \quad t>0 \tag{1.11}$$

для скорости $\boldsymbol{v}$ жидкой компоненты, однородным начальным условием

$$\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{x},0) = 0, \qquad \boldsymbol{x}\in\Omega \tag{1.12}$$

и однородными граничными условиями

$$p_s(\boldsymbol{x},t) = 0, \qquad x\in S_2\,, \quad t>0,,$$

$$\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0\,, \qquad x\in S_1\,, \quad t>0\,, \tag{1.13}$$

для давления p_s и вектора перемещений $\boldsymbol{u}_s$ твёрдой компоненты.

В уравнениях (1.7)-(1.10) $m = \int_Y \chi dy$ – пористость среды. Симметричный строго положительно определенный постоянный тензор четвертого ранга $\mathbb{A}_0^f$, матрицы $\mathbb{B}_1^f$ и $\mathbb{B}_1^s(t)$ даются ниже формулами (4.18),(4.21).

2. Доказательство теоремы 1

Оценки (1.5) и (1.6) для перемещений следуют из энергетического тождества в форме

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \rho^\varepsilon \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right)^2 dx + \alpha_\lambda \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon)\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right):\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right)dx\right)$$

$$+\,\alpha_\mu \int_\Omega \chi^\varepsilon\,\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right):\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right)dx = \int_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\,dx\,. \tag{2.1}$$

Последнее получается после дифференцирования уравнения для $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ по времени, умножения на $\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t^2$ и интегрирования по частям. Заметим, что все слагаемые не границе Γ^ε "твёрдый скелет-поровое пространство" исчезают, благодаря граничным условиям (0.5)–(0.6). Используя неравенства Гёльдера и Гронуолла в (2.1), получаем требуемые оценки (1.5) и (1.6) для перемещений. Эти же оценки гарантирует существование и единственность обобщенного решения задачи (0.1)–(0.9). Для этого достаточно воспользоваться методом Галеркина, рассмотрев в качестве базового пространство соленоидальных функций из $W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию (0.8), а в качестве базиса – любой базис, ортонормированный в скалярном произведении пространства $L^2(\Omega)$.

Для оценки давлений мы используем интегральное тождество (1.3) в форме

$$\int_\Omega p^\varepsilon \mathrm{div}\boldsymbol{\psi} dx =$$

$$\int_\Omega \left(\rho^\varepsilon \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2} - \boldsymbol{F}\right) \cdot \boldsymbol{\psi} + \left(\chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) + (1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda \mathbb{D}\left(x, \boldsymbol{w}^\varepsilon\right)\right) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\psi})\right) dx\,,$$

рассматривая давление p^ε как линейный функционал на пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ (см. [1], [2]).

3. Доказательство теоремы 2

Первое утверждение теоремы есть результат работы [3].

Оценки (1.5) и (1.6) Теоремы 1 и теорема Нгуетсенга [4] доказывают второе утверждение теоремы. Четвертое утверждение теоремы есть следствие леммы, которую приведём без доказательства.

Лемма 1. *Пусть функции*

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon \in L^2(0,T; W_2^1(\Omega))$$

и $\boldsymbol{v}^\varepsilon = 0$ *в части* $\sigma^\varepsilon = S_0 \cap S_f^\varepsilon \subset S_f^\varepsilon = \partial\Omega_f^\varepsilon \cap \partial\Omega$ *границы* $S = \partial\Omega$, *последовательность* $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon; \varepsilon > 0\}$ *сходится слабо в* $L^2(0,T;\ W_2^1(\Omega))$ *к функции* $\boldsymbol{v}$.

Тогда $\boldsymbol{v} = 0$ *в части* S_0 *границы* S. *То есть*

$$\int_0^T \int_{S_0} |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{n}, t)|\, d\sigma dt \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0\,,$$

где $\boldsymbol{n}$ *– вектор единичной нормали к границе* S *в точке* $\boldsymbol{x}$.

Наконец, третье утверждение теоремы доказывается, наряду с другими утверждениями, в нижеследующей лемме.

Лемма 2. *Для почти всех* $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_T$ *и* $\boldsymbol{y} \in Y$ *слабые и двухмасштабные пределы последовательностей* $\{\chi^\varepsilon p^\varepsilon\}$, $\{(1-\chi^\varepsilon)p^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ *и* $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$, *упорядоченные числом* $\varepsilon > 0$, *удовлетворяют соотношениям*

$$P_s = p_s \frac{(1-\chi)}{(1-m)}\,, \quad P_f = \chi P_f\,, \tag{3.1}$$

$$\mathrm{div}\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\right) = 0\,, \tag{3.2}$$

$$\chi\left(\mathrm{div}\boldsymbol{v} + \mathrm{div}_y \boldsymbol{V}\right) = 0\,, \tag{3.3}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{w} = 0\,, \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in S\,, \tag{3.5}$$

$$\mathrm{div}_y \boldsymbol{W} = 0, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} = \chi\, \boldsymbol{v} + (1-\chi)\, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\,, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} = \chi\, \boldsymbol{v} + (1-\chi)\, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\,. \tag{3.7}$$

□ Для доказательства (3.1), в интегральное тождество (1.3) подставим пробную функцию вида $\boldsymbol{\psi}^\varepsilon = \varepsilon \boldsymbol{\psi}\,(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{x}/\varepsilon)$, где $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ – произвольная 1-периодическая, финитная в области Y_s функция от $\boldsymbol{y}$. Переходя к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, мы получим

$$\nabla_y P_s(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = 0\,, \qquad \boldsymbol{y} \in Y_s\,. \tag{3.8}$$

Далее, осуществляя двухмасштабный предельный переход в равенстве

$$\chi^\varepsilon \Big((1-\chi^\varepsilon) p^\varepsilon \Big) = 0\,,$$

получим

$$\chi P_s = 0\,,$$

что, вместе с (3.8), доказывает (3.1).

Для доказательства (3.2) достаточно рассмотреть уравнение неразрывности в виде

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \nabla \varphi(\boldsymbol{x}, t) dx dt = 0\,,$$

справедливое для всякой гладкой финитной в Ω_T функции φ, и перейти к пределу при $\varepsilon \searrow 0$.

Для доказательства (3.3), достаточно рассмотреть двухмасштабный предел в уравнении неразрывности (1.2) при $\varepsilon \searrow 0$ с пробными функциями вида $\psi\,(\boldsymbol{x}/\varepsilon)\, h(\boldsymbol{x}, t)$, где ψ и h – произвольные гладкие функции. Равенства (3.4), (3.5) получатся, если уравнение (1.2) умножить на произвольную функцию, не зависящую от "быстрой" переменной $\boldsymbol{x}/\varepsilon$, и перейти к пределу при $\varepsilon \searrow 0$. Для доказательства (3.6) достаточно рассмотреть двухмасштабный предел в уравнении (1.2) при $\varepsilon \searrow 0$ с пробными функциями вида $\varepsilon \psi\,(\boldsymbol{x}/\varepsilon)\, h(\boldsymbol{x}, t)$, где ψ и h – произвольные гладкие функции. Для доказательства (3.7) необходимо рассмотреть двухмасштабные пределы в тождестве

$$\chi^\varepsilon \left(\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t} - \boldsymbol{v}^\varepsilon \right) = 0\,. \qquad \blacksquare$$

Доказательство теоремы 3

Доказательство теоремы разобьем на ряд независимых утверждений.

Лемма 3. *Для всех* $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_T$ *выполняется соотношение*

$$\mathrm{div}_y \left(\mu_0 \chi \left(\mathbb{D}(y, \boldsymbol{V}) + \mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}) \right) - \left(P_f + \frac{(1-\chi)}{(1-m)} p_s \right) \mathbb{I} \right) = 0\,. \tag{4.1}$$

□ Подставляя пробную функцию вида $\boldsymbol{\psi}^\varepsilon = \varepsilon\boldsymbol{\psi}\,(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{x}/\varepsilon)$, где $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ – произвольная 1-периодическая по $\boldsymbol{y}$ функция, исчезающая на границе S_1, в интегральное тождество (1.3), и переходя к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, получим уравнение (4.1), которое можно также переписать в виде

$$\operatorname{div}_y \left(\chi\big(\mu_0(\mathbb{D}(y, \boldsymbol{V}) + \mathbb{D}(x, \boldsymbol{v})) - \left(P_f - \frac{1}{(1-m)}\, p_s\right) \mathbb{I}\big)\right) = 0\,. \qquad \blacksquare \tag{4.2}$$

Лемма 4. *Пусть $\hat{\rho} = m\rho_f + (1-m)\rho_s$. Тогда функции $\boldsymbol{u}_s = \langle \boldsymbol{W}\rangle_{Y_s}$, $\boldsymbol{v}$, и p удовлетворяют в Ω_T системе макроскопических уравнений*

$$\rho_f m\,\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_s}{\partial t^2} - \hat{\rho}\boldsymbol{F} = \operatorname{div}\{\mu_0(m\mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}) + \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{V})\rangle_{Y_f}) - p\cdot\mathbb{I}\}\,, \tag{4.3}$$

и однородным начальным условиям

$$\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{x}, 0) = \rho_f m \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, 0) + \rho_s \frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial t}(\boldsymbol{x}, 0) = 0\,, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega\,. \tag{4.4}$$

□ Уравнения (4.3) и начальные условия (4.4) есть результат предельного перехода в тождестве (1.3) с пробными функциями, не зависящими от ε в Ω_T. ■

Лемма 5. *Слабые и двухмасштабные пределы p_s и $\boldsymbol{W}$ удовлетворяют микроскопическим уравнениям*

$$\rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial t^2} = \lambda_1 \triangle_y \boldsymbol{W} - \nabla_y R - \frac{1}{1-m}\nabla p_s + \rho_s \boldsymbol{F}\,, \qquad \boldsymbol{y} \in Y_s\,, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} = \boldsymbol{v}\,, \qquad \boldsymbol{y} \in \gamma \tag{4.6}$$

и однородным начальным условиям

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{y}, 0) = \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}(\boldsymbol{y}, 0) = 0\,, \qquad \boldsymbol{y} \in Y_s\,. \tag{4.7}$$

□ Дифференциальные уравнения (4.5) и начальные условия (4.7) следуют при $\varepsilon \searrow 0$ из интегрального тождества (1.3) с пробной функцией вида $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}(x\varepsilon^{-1})\cdot h(\boldsymbol{x}, t)$, где $\boldsymbol{\varphi}$ – соленоидальная, финитная в Y_s функция.

Краевое условие (4.6) есть следствие двухмасштабной сходимости последовательности $\{\sqrt{\alpha_\lambda}\,\nabla \boldsymbol{w}^\varepsilon; \varepsilon > 0\}$ к функции $\sqrt{\lambda_1}\,\nabla_y \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$. В силу этой сходимости, функция $\nabla_y \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ является L^2-интегрируемой в Y. ■

Лемма 6. *Слабые и сильные пределы $\boldsymbol{u}_s$, p, p_s и $\boldsymbol{v}$ являются решениями начально-краевой задачи в области Ω_T, состоящей из закона сохранения количества движения*

$$\rho_f m\,\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_s}{\partial t^2} = \operatorname{div}\tilde{\mathbb{P}} + \hat{\rho}\boldsymbol{F}\,, \tag{4.8}$$

$$\tilde{\mathbb{P}} = \mu_0 \mathbb{A}_0^f : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}) + \mathbb{B}_1^f \mathrm{div} \boldsymbol{v} - p\mathbb{I}\,, \tag{4.9}$$

для жидкой компоненты, уравнения неразрывности

$$\mathrm{div}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial t}\right) + m \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0\,, \tag{4.10}$$

соотношения

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial t} = (1-m)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) + \int_0^t \mathbb{B}_1^s(t-\tau) \cdot \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}, \tau) d\tau\,, \tag{4.11}$$

$$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{1}{1-m} \nabla p_s(\boldsymbol{x}, t) + \rho_s \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t) - \rho_s \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t)$$

для твёрдой компоненты.

Дифференциальные уравнения (4.8)-(4.11) дополняются однородными краевыми и начальными условиями

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, 0) = 0\,, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega\,;$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = 0\,, \qquad \boldsymbol{x} \in S_1\,, \quad (\tilde{\mathbb{P}} \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{x}, t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S_2\,, \quad t > 0 \tag{4.12}$$

для скорости $\boldsymbol{v}$ жидкой компоненты, однородным начальным условием

$$\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{x}, 0) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{4.13}$$

и однородными граничными условиями

$$p_s(\boldsymbol{x}, t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S_2, \quad t > 0,$$

$$\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in S_1\,, \quad t > 0\,, \tag{4.14}$$

для давления p_s и вектора перемещений $\boldsymbol{u}_s$ твёрдой компоненты.

□ Усредненные уравнения (4.8) следуют из макроскопических уравнений (4.3) после подстановки в них выражения

$$\mu_0 \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{V}) \rangle_{Y_f} = \mu_0 \mathbb{A}_1^f : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}) + \mathbb{B}_1^f \,\mathrm{div} \boldsymbol{v}\,.$$

В свою очередь, последняя формула есть результат решения уравнений (3.3) и (4.2) на элементарной ячейке Y_f.

Действительно, полагая

$$\boldsymbol{V} = \sum_{i,\,j=1}^{3} \boldsymbol{V}^{(ij)}(\boldsymbol{y}) D_{ij} + \boldsymbol{V}^{(1)}(\boldsymbol{y}) \mathrm{div} \boldsymbol{v}\,,$$

$$P_f - \frac{1}{(1-m)}\, p_s = \mu_0 \sum_{i,j=1}^{3} P^{ij}(\boldsymbol{y}) D_{ij} + P^{(1)}(\boldsymbol{y})\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}\,,$$

где

$$D_{ij}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}, t) + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, t)\right)\,,$$

получим следующие периодические краевые задачи в Y:

$$\mathrm{div}_y\left(\chi\left(\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}^{(ij)})-P^{(ij)}\mathbb{I}+\mathbb{J}^{ij}\right)\right)=0\,,\quad \chi\,\mathrm{div}_y\,\boldsymbol{V}^{(ij)}=0\,, \tag{4.15}$$

$$\mathrm{div}_y\{\mu_0\chi\,\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}^{(1)})-\chi\,P^{(1)}\mathbb{I}\}=0,\quad \chi\,(\mathrm{div}_y\boldsymbol{V}^{(1)}+1)=0\,. \tag{4.16}$$

Как следует из предположения о геометрии "жидкой" части ячейки Y_f, задачи (4.15)-(4.16) имеют единственное решение, с точностью до постоянного вектора. С целью исключения произвола потребуем, чтобы

$$\langle\boldsymbol{V}^{(ij)}\rangle_{Y_f}=\langle\boldsymbol{V}^{(1)}\rangle_{Y_f}=0\,.$$

Таким образом,

$$\mathbb{A}_0^f=m\mathbb{J}+\mathbb{A}_1^f\,,\quad \mathbb{A}_1^f=\sum_{i,j=1}^{3}\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}^{(ij)})\rangle_{Y_f}\otimes\mathbb{J}^{ij}\,, \tag{4.17}$$

$$\mathbb{B}_1^f=\mu_0\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}^{(1)})\rangle_{Y_f}\,. \tag{4.18}$$

Симметричность тензора $\mathbb{A}_0^f$ следует из симметричности тензора $\mathbb{A}_1^f$. Симметричность последнего следует из равенства

$$\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}^{(ij)})\rangle_{Y_f}:\mathbb{J}^{kl}=-\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}^{(ij)}):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}^{(kl)})\rangle_{Y_f}\,, \tag{4.19}$$

которое, в свою очередь, является результатом умножения уравнения (4.15) для функции $\boldsymbol{V}^{(ij)}$ на $\boldsymbol{V}^{(kl)}$ и интегрирования по частям. Это же равенство доставляет нам положительную определенность тензора $\mathbb{A}_0^f$. Действительно, пусть $\mathbb{Z}=(Z_{ij})$ есть произвольная симметричная матрица. Полагая

$$\mathbf{Z}=\sum_{i,j=1}^{3}\boldsymbol{V}^{(ij)}Z_{ij}$$

и, учитывая (4.19), получаем

$$\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{Z})\rangle_{Y_f}:\mathbb{Z}=-\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{Z}):\mathbb{D}(y,\mathbf{Z})\rangle_{Y_f}\,.$$

Последнее равенство и определение тензора $\mathbb{A}_0^f$ дают

$$(\mathbb{A}_0^f:\mathbb{Z}):\mathbb{Z}=\langle(\,\mathbb{D}(y,\mathbf{Z})+\mathbb{Z}):(\,\mathbb{D}(y,\mathbf{Z})+\mathbb{Z})\rangle_{Y_f}\,.$$

Строгая положительная определенность тензора $\mathbb{A}_0^f$ следует теперь из вышеприведенного равенства и геометрии элементарной ячейки Y_f. А именно, положим $(\mathbb{A}_0^s:\mathbb{Z}):\mathbb{Z}=0$ для некоторой матрицы $\mathbb{Z}$, такой что $\mathbb{Z}:\mathbb{Z}=1$. Тогда $(\mathbb{D}(y,\mathbf{Z})+\mathbb{Z})=0$, что возможно, если и только если $\mathbf{Z}$ – линейная функция переменной $\boldsymbol{y}$. С другой стороны, все линейные периодические функции в Y_f исчерпываются постоянными. Наконец,

нормировка $\langle \boldsymbol{V}^{(ij)} \rangle_{Y_f} = 0$ влечет равенство $\mathbf{Z} = 0$. Последнее невозможно, поскольку функции $\boldsymbol{V}^{(ij)}$ линейно независимы.

Получим усредненные уравнения движения для перемещений $\boldsymbol{u}_s$ твёрдой компоненты.

Решение системы микроскопических уравнений (4.5), (4.6) и (3.6), дополненной однородными начальными условиями (4.7), даётся формулой

$$\boldsymbol{W} = \int_0^t (\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau) + \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{W}^i(\boldsymbol{y}, t-\tau) \otimes \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},\tau)) d\tau \,,$$

$$R = \int_0^t \sum_{i=1}^{3} R^i(\boldsymbol{y}, t-\tau) \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},\tau) d\tau \,,$$

в которой функции $\boldsymbol{W}^i(\boldsymbol{y},t)$, $R^i(\boldsymbol{y},t)$ – решения периодических начально-краевых задач

$$\rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}^i}{\partial t^2} - \lambda_1 \triangle \boldsymbol{W}^i + \nabla R^i = 0, \quad \mathrm{div}_y \boldsymbol{W}^i = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_s,\, t > 0,$$

$$\boldsymbol{W}^i = 0, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma \,, \quad t > 0 \,, \tag{4.20}$$

$$\boldsymbol{W}^i(y,0) = 0 \,, \quad \rho_s \frac{\partial \boldsymbol{W}^i}{\partial t}(y,0) = \boldsymbol{e}_i \,, \quad \boldsymbol{y} \in Y_s \,.$$

Здесь $\boldsymbol{e}_i \quad (i = 1,2,3)$ – единичные векторы декартовой системы координат. Тогда

$$B_1^s(t) = \sum_{i=1}^{3} \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{W}^i}{\partial t} \right\rangle_{Y_s} \otimes \boldsymbol{e}_i(t) \,. \tag{4.21}$$

Заметим, что дифференциальные уравнения (4.20) следует понимать в смысле теории распределений (согласованность условий на границе γ при $t = 0$ не имеет места), а следовательно функции $\partial \boldsymbol{W}^i / \partial t$ не дифференцируемы при $t = 0$. Граничное условие (4.14) следует из уравнения (3.5), равенства

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial t} + m\boldsymbol{v},$$

и однородных граничных условий для скорости жидкой компоненты $\boldsymbol{v}$. Это же равенство и уравнение (3.2) доказывают (4.11). ■

Литература

1. Meirmanov A. Homogenized models for a short-time filtration in elastic porous media // EJDE. – 2007. – 18. – P.481-496.

2. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Наука,1970.

3. Conca C. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // J. math. pures et appl. – 1985. – 64. – P.31-75.

4. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 1989. – 20. – P.608-623.

MATHEMATICAL MODELING OF SHORT-TIME FILTRATION OF IMCOMPRESSIBLE LIQUID. THE AVERAGE OF PERIODIC STRUCTURES AND THE TWO-VELOCITY CONTINUUM

I.V. Nekrasova

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Nekrasova_i@bsu.edu.ru

Abstract. The paper deals with the linear system of differential equations describing the joint motion of elastic porous body and fluid occupying porous space. It is supposed the periodical structure of porous space and state that the characteristic time of process is small enough. We suggest a conclusion of homogenized equations which are non-isotropic Stokes equations for fluid velocity coupled with acoustic equations for the solid component for two-velocity continuum. The proofs are based on Nguetseng's two-scale convergence method of homogenization in periodic structures.

Keywords: Stokes equations, hydraulic fracturing, two-scale convergence, homogenization of periodic structures.

УДК 517.927

О ВАРИАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЕТЯХ

Ю.В. Покорный, Н.Н. Рябцева

Воронежский государственный университет,
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394006, Россия

Аннотация. Устанавливаются аналоги классической теоремы Якоби о положительной определённости второй вариации для функционала, заданного на функциях от ветвящегося аргумента из пространственной сети (геометрического графа). Функционал аналогичен функционалу из задачи Больца. Особенности соответствующего аналога уравнения Якоби (как и уравнения Эйлера) порождены процедурой интегрирования по частям, приводящей к дифференцированию по склеенным (состыкованным) мерам.

Ключевые слова: геометрический граф, вариации функционала, склеенные меры, положительная определённость.

При анализе задач вариационного происхождения для объектов сетеподобной структуры (типа геометрического графа) неизбежно столкновение с трудностями, порождаемыми неоднозначным толкованием используемых на сети интегралов, которые объединяют исходную систему в цельный объект. Дело в том, что в рамках основополагающей для вариационного подхода процедуры интегрирования по частям используемые интегралы, которые являются по существу интегралами Стильтьеса, меняют смысл, так как меняется характер порождающих их мер. Уже для функций скалярного аргумента на отрезке $[a;b]$ корректность равенства

$$\int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du = \big[uv\big]_a^b \qquad \big(= u(b)v(b) - u(a)v(a)\big) \tag{1}$$

зависит от гладкости u, v и от толкования интеграла. Если хотя бы одна из функций $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ непрерывна, а другая принадлежит $BV[a;b]$, т.е. имеет ограниченную вариацию, то равенство (1) верно при трактовке интегралов по Риману-Стилтьесу. Расширение понятия суммируемости с риманова до лебегова допускает разрывы одновременно у обеих функций.

Деликатность ситуации заключается в том, что оба интеграла слева в (1) могут оказаться различными по существу: если в первом из них $\int_a^b u\,dv$ функция $v(x)$ определяет меру, по которой происходит интегрирование, и в каждой точке $s \in (a;b)$ важны лишь значения левого и правого пределов $v(s-0)$ и $v(s+0)$, задающие меру любого сегмента $\mu[\alpha;\beta] = v(\beta+0) - v(\alpha-0)$, а собственное значение $v(s)$ в этой точке не играет никакой

роли, то у интегрируемой функции $u(x)$ именно собственное значение в каждой точке играет определяющую роль. Во втором интеграле $\int\limits_a^b v\,du$ функции $v(x)$ и $u(x)$ меняются ролями: $v(x)$ важна уже поточечными значениями, а $u(x)$ уже задаёт меру, как функцию множества. При этом осмысленность каждого слагаемого слева в равенстве (1) ещё не означает справедливости этого равенства в целом.

Как раз в важнейшем для нас случае, когда исследуемая физическая система состоит из двух смыкающихся одномерных континуумов, и есть потребность ассоциировать их с двумя смыкающимися отрезками $[a;\xi]$ и $[\xi;b]$ (при $a<\xi<b$), что связано со стыковкой в рамках каждого интеграла из (1) двух пар "соседствующих" мер, когда каждая из этих односторонних относительно точки ξ мер как бы наслаивается в точке ξ на соседку. Можно ли результат каждой такой стыковки объединять *единым интегралом на* $[a;b]$ так, чтобы для такого интеграла была верна в целом формула типа (1)?! Именно этот вопрос, в миниатюре, отражает проблемы интегрирования в вариационных задачах на геометрических графах, где во внутренних узлах может стыковаться более чем по два отрезка-ребра.

При обсуждении понятия интегрирования мы пользуемся общепринятой терминологией из [1-3]. Наиболее корректную версию классических вариационных фактов см. в [4]. Уравнения на геометрических графах мы обсуждаем в терминах [5], в основном напоминая их.

Общая природа трудностей, порождаемых обобщённым дифференцированием по "склеенным мерам", обсуждается в [6, 7]. Ниже, мы преодолеваем их стандартными средствами.

1. Отправным объектом обсуждения, далее, является рассмотренный в работе [8] функционал

$$\Phi(u)=\int\limits_{\Gamma} F(x,u,u')\,dx \quad \left(=\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\gamma_i} F(x,u,u')\,dx\right). \tag{2}$$

Здесь $u:\Gamma\to\mathbb{R}$, а Γ обозначает геометрический связный граф из $\mathbb{R}^n$, составленный из конечного набора $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ рёбер (интервалов) и совокупности $\mathcal{J}(\Gamma)$ внутренних вершин (узлов) – концов этих интервалов, где они смыкаются. Остальные концы этих интервалов, не вошедшие в $\mathcal{J}(\Gamma)$, мы называем граничными вершинами, обозначая их совокупность через $\partial\Gamma$ и предполагая, что $\partial\Gamma\neq\emptyset$. Мы считаем, что граф Γ ориентирован (это необходимо для придания смысла дифференцированию вдоль рёбер[3]). Начало ребра γ_i, в смысле заданной ориентации, обозначим через a_i а конец – через b_i. Подчеркнём, что каждое ребро Γ является открытым интервалом, т. е. не содержит концов.

Функция $F(x,u,u')$ трёх аргументов определена на $R(\Gamma)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, где $R(\Gamma)=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\gamma_i$. Это значит, что второй и третий аргументы F скалярны, изменяясь в $\mathbb{R}$, а первый

[3]Производная понимается в соответствии с [5], т. е. как производная по единичному направлению вдоль ребра от его начала к концу.

– ветвящийся, изменяясь в Γ. Последнее означает, что фактически мы имеем набор $\left\{F^{(\gamma_i)}(x,u,u')\right\}$ функций трёх скалярных аргументов, где через $F^{(\gamma_i)}$ мы обозначили сужение F на $\gamma_i\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Будем предполагать, что функция обладает свойством, которое мы назовем C-свойством. Будем говорить, что F обладает C-свойством, если для любого $i=\overline{1,m}$ функция $F^{(\gamma_i)}$ непрерывна на $\gamma_i\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и непрерывно доопределяема на $[\gamma_i]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, где $[\gamma_i]$ – замыкание ребра γ_i. Описанное предположение означает, что для любой равномерно непрерывной на каждом γ_i функции $u(x):\Gamma\to\mathbb{R}$ с аналогичной производной $u'(x)$ формальная запись (2) допускает корректную расшифровку, как сумма интегралов от сужений $F(x,u(x),u'(x))$ на рёбра γ_i.

Мы рассматриваем функционал (2) на функциях, каждая из которых непрерывна на Γ и непрерывно дифференцируема на замыкании $[\gamma_i]$ каждого ребра $\gamma_i\subseteq\Gamma$. Для каждого ребра γ_i рассматриваемое множество функций вполне аналогично стандартному $C^1[\gamma_i]$, так что функционал (2) может считаться определённым на прямой сумме этих пространств. Используя здесь в качестве нормы сумму (по i) обычных норм в $C^1[\gamma_i]$, мы рассматриваем этот функционал на сужении этого пространства, состоящем из непрерывных в целом на Γ функций. Обозначим это пространство через E. Оно оказывается банаховым, т. е. полным, ибо оно является сужением банахова пространства на пересечение гиперплоскостей непрерывных функционалов, порождаемых условиями непрерывных стыковок в $\mathcal{J}(\Gamma)$.

Аналогом классического условия закрепления концов у нас будет условие задания фиксированного набора значений

$$\{u(a)\}_{a\in\,\partial\Gamma}\ . \tag{3}$$

Множество функций из E с фиксированным набором (3) мы обозначаем далее через $\mathfrak{M}$. Очевидно, $\mathfrak{M}$ есть линейное многообразие в E.

Далее мы будем рассматривать функционал более общего вида, нежели (2), а именно, функционал

$$\Phi_1(u)=\Phi(u)+\sum_{a\in\,\mathcal{J}(\Gamma)}G_a(u(a))\,, \tag{4}$$

где $G_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $G_a\in C^2(\mathbb{R})$ для любой $a\in\mathcal{J}(\Gamma)$.

Рассмотрим задачу

$$\Phi\to\min_{\mathfrak{M}}\ .$$

Аналогом классической теоремы Эйлера-Лагранжа (см. [4], стр. 35) является следующий факт.

Теорема 1. *Пусть все производные второго порядка функции F обладают* C*-свойством. Пусть $u_0(x)$ из $\mathfrak{M}$ – точка минимума функционала* (4)*. Пусть $u_0(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на каждом ребре γ_i. Тогда на каждом ребре γ_i для неё справедливо тождество*

$$F_u(x,u_0(x),u_0'(x))-\frac{d}{dx}F_{u'}(x,u_0(x),u_0'(x))=0\,, \tag{5}$$

а в каждой внутренней вершине $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$ справедливо условие

$$-\sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} æ_i(a) F_{u'}^{(\gamma_i)}\left(a, u_0(a), (u_0)_i'(a)\right) + (G_a)'\left(u_0(a)\right) = 0\,. \tag{6}$$

Здесь $\Gamma(a)$ обозначает набор примыкающих к a рёбер. Число $æ_i(a)$ равно 1, если ребро γ_i ориентировано "от a", и равно -1, если γ_i ориентировано "к a". Через $(u_0)_i'(a)$ обозначен предел $(u_0)'(x)$ при x стремящемся к a по ребру γ_i.

□ Пусть E_0 – совокупность таких функций из E, что

$$u\big|_{\partial\Gamma} = 0\,. \tag{7}$$

Рассматривая для любой фиксированной $h \in E_0$ функцию $\varphi(\lambda) = \Phi_1(u_0 + \lambda h)$ скалярного аргумента λ, получим: $\left.\dfrac{d\varphi}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0$, т. е.

$$\int\limits_{\Gamma} \Big(F_u\big(x, u_0(x), u_0'(x)\big)h(x) + F_{u'}\big(x, u_0(x), u_0'(x)\big)h'(x)\Big)\,dx + \\ + (G_a)'\left(u_0(a)\right)h(a) = 0. \tag{8}$$

Проинтегрируем вторые слагаемые по частям вдоль каждого замыкания $[\gamma_i]$ ребра γ_i. В результате, пользуясь тем, что в граничных вершинах функция h удовлетворяет условиям (7), из (8) мы получим равенство

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\gamma_i} \left(F_u^{(\gamma_i)}\big(x, u_0(x), u_0'(x)\big) - \frac{d}{dx} F_{u'}^{(\gamma_i)}\big(x, u_0(x), u_0'(x)\big)\right) h_i(x)\,dx +$$

$$+ \sum_{a \in \mathcal{J}(\Gamma)} \left(-\sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} æ_i(a) F_{u'}^{(\gamma_i)}\big(a, u_0(a), (u_0)_i'(a) + (G_a)\left(u_0(a)\right)'\big)\right) h(a) = 0\,.$$

Отсюда в силу произвола $h \in E_0$ естественно следует (5) и (6). ■

Замечание 1. Предположение о непрерывности второй производной у экстремали $u_0(x)$ нам потребовалось лишь для того, чтобы без помех проинтегрировать по частям (на каждом ребре) интеграл

$$\int\limits_{\gamma_i} F_{u'}^{(\gamma_i)}\big(x, u_0(x), u_0'(x)\big)h'(x)\;dx = \int\limits_{\gamma_i} F_{u'}^{(\gamma_i)}\big(x, u_0(x), u_0'(x)\big)\;dh(x)\,,$$

опираясь на дифференцируемость суперпозиции $F_{u'}^{(\gamma_i)}\big(x, u_0(x), u_0'(x)\big)$. (Даже и в этом, достаточно регулярном, случае мы получаем не чистый аналог формулы (1), так как помимо внеинтегральных членов на границе $\partial\Gamma$ у нас появляются внеинтегральные члены и внутри области интегрирования Γ). Если этой дифференцируемости у функции

$F_{u'}\big(x, u_0(x), u_0'(x)\big)$ нет по причине недостаточной гладкости $u_0(x)$ (или в случае отсутствия непрерывности $F_{u'}$), то естественно использовать классические соображения Дюбуа-Реймона.

Здесь мы воочию сталкиваемся с проблемой интегрирования по частям в рамках интеграла Стильтьеса, когда в проблемных точках (здесь – во внутренних вершинах из $\mathcal{J}(\Gamma)$) обнаруживаются атомы меры, приводящие к появлению внеинтегральных членов. И условия (6), являясь необходимыми для экстремума функционала, автоматически ликвидируют это малоприятное обстоятельство.

Замечание 2. Условие типа (6) известно для задачи Штурма-Луивилля на графе, естественно возникая в физических задачах, как условие трансмиссии (см., например, [5, стр. 7-8]). В случае классической задачи на отрезке условие (6) (при $G_a = 0$ для всех $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$) в точности совпадает с условием Эрдмана-Вейерштрасса для ломаной экстремали [9, стр. 218], автоматически выполняясь во всех точках гладкости.

Если следовать концепции, разработанной в [5], то систему (5), (6) следует рассматривать как единое уравнение на Γ для функции $u_0(x)$. Поэтому резонно ввести следующие термины.

Определение 1. *Систему* (5), (6) *будем называть уравнением Эйлера для функционала* (4).

Определение 2. *Решение уравнения Эйлера для функционала* (4) *будем называть экстремалью этого функционала, а решение этого уравнения, принадлежащее* $\mathfrak{M}$, *будем называть допустимой экстремалью функционала* (4).

2. Вторая вариация функционала (4) имеет вид:

$$\delta^2\Phi_1(u_0)h = \int\limits_{\Gamma} \big[M(x)h^2(x) + 2Q(x)h(x)h'(x) + N(x)h'^2(x)\big]dx + \\ + \sum_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)} R_a h^2(a)\,, \tag{9}$$

где

$$M(x) = F_{u'u'}(x, u_o(x), u_0'(x))\,, \quad N(x) = F_{uu}(x, u_0(x), u_0'(x))\,,$$
$$Q(x) = F_{uu'}(x, u_0(x), u_0'(x))\,, \quad R_a = (G_a)''\,(u_0(a))\ .$$

Далее предполагается, что все производные третьего порядка функции F обладают C-свойством.

Теорема 2. *Пусть вторая вариация функционала* (4) *неотрицательна для всех* $h \in E_0$. *Тогда* $M(x) \geq 0$ *на* $R(\Gamma) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \gamma_i$.

□ Проинтегрируем по частям второе слагаемое в правой части (9):

$$\int\limits_{\Gamma} 2Qhh'dx = \sum_{i=1}^{m} \big[Q_i h^2\big]_{a_i}^{b_i} - \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\gamma_i} Q'h^2\,dx =$$

$$= -\sum_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)}\sum_{\gamma_i\in\Gamma(a)} æ_i(a)Q_i(a)h^2(a) - \int\limits_{\Gamma} Q'h^2dx\,.$$

Таким образом, равенство (9) примет вид:

$$\delta^2\Phi_1(u_0)h = \int\limits_{\Gamma}\left(Mh'^2 + (N-Q')h^2\right)dx - \\ - \sum_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)}\left[\sum_{\gamma_i\in\Gamma(a)} æ_i(a)Q_i(a) - R_a\right]h^2(a)\,. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь в (10) $h\in E_j$, где $E_j = \left\{h\in E_0 \,\middle|\, h\big|_{\Gamma\setminus\gamma_j}\equiv 0\right\}$. Для таких h (10) примет вид:

$$\delta^2\Phi_1(u_0)h = \int\limits_{\gamma_j}\left(M_jh_j'^2 + (N_j - Q'_j)h_j^2\right)dx\,; \tag{11}$$

здесь через h_j обозначено сужение h на γ_j. Таким образом, из неотрицательности функционала (9) для всех $h\in E_0$ вытекает, что

$$\int\limits_{\gamma_j}\left(M_jh_j'^2 + (N_j - Q'_j)h_j^2\right)dx \geq 0 \tag{12}$$

для всех $h_j\in C_0^1[\gamma_j]$, где $C_0^1[\gamma_j] = \{h_j\in C^1[\gamma_j] \,|\, h_j(a_j) = h_j(b_j) = 0\}$. Применяя теперь к неравенству (12) известный результат для квадратичного функционала на отрезке (см., например, [10], часть 1, п. 1.6.2), получим, что $M_j(x)\geq 0$. Поскольку j выбрано произвольно, то это и означает, что $M(x)\geq 0$ на $R(\Gamma)$. ■

Если u_0 – допустимая экстремаль функционала (4), то неравенство

$$F_{u'u'}(x, u_0(x), u_0'(x)) \geq 0\,,$$

выполненное при всех $x\in R(\Gamma)$, естественно называть условием Лежандра на u_0.

3. Далее нас интересуют условия минимума Φ_1 в терминах второй вариации, которая имеет вид квадратичного функционала (9). Нам предстоит построить более глубокий, чем выше, аналог формулы интегрирования по частям.

Необходимое условие минимума $\delta^2\Phi_1(u_0)h\geqslant 0$ (на всех допустимых $h\in E_0$) аналогично классической ситуации приводит нас (см. теорему 2) к неравенству $M(x)\geqslant 0$ на каждом ребре (аналог условия Лежандра). Строгое на $R(\Gamma)$ неравенство $M(x)>\varepsilon>0$ (где ε – некоторое число) согласно даже скалярной теории недостаточно для неотрицательности квадратичного функционала (9). Желаемое для нас свойство

$$\delta^2\Phi_1(u_0)h > 0 \quad (h\not\equiv 0,\quad h\in E_0)$$

мы обеспечим вполне аналогично классической теореме Якоби.

Введём в рассмотрение уравнение

$$(Mz')' - 2Qz' + \left(\frac{Q^2}{M} - N\right) z = 0\,, \tag{13}$$

предполагая функции Q, M, N равномерно непрерывными на каждом ребре, причём $\inf M > 0$. Уравнение (13) мы трактуем обычным образом на каждом ребре Γ, а в каждой из внутренних вершин $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$ мы предполагаем непрерывность решения $z : \Gamma \to \mathbb{R}$, а также выполнение следующих условий:

$$\sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} æ_i(a) M_i(a) z_i'(a) - R_a z(a) = 0\,. \tag{14}$$

В случае, когда $Q(x) \equiv 0$ и $R_a = 0$ (для всех $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$), т. е. когда функционал (9) имеет самосопряжённый вид

$$\delta^2 \Phi_1(u_0) h = \int\limits_{\Gamma} (Mh'^2 + Nh^2)\, dx\,,$$

как это рассматривается в классической теории при $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$, т. е. в пространстве функций скалярного аргумента, уравнение (13) совпадает со стандартным уравнением Якоби

$$(Mz')' - Nz = 0\,. \tag{15}$$

Определение 3. *Скажем, что функционал* (9) *удовлетворяет условию Якоби, если уравнение* (13) *имеет при условиях* (14) *хотя бы одно строго положительное на* $\Gamma \cup \partial\Gamma$ *решение.*

Это условие для скалярной (на отрезке) задачи эквивалентно классическому условию Якоби об отсутствии на рассматриваемом отрезке сопряженных к левому концу точек. Для случая общего графа и двучленного уравнения (15) аналогичное условие детально изучено в [5, Гл. 4]. Условие (14) вполне аналогично вводившемуся выше условию трансмиссии (6).

Теорема 3. *Если*
1) $\inf\limits_{x \in R(\Gamma)} M(x) > 0$ *и* $R_a \geqslant 0$ *для всех* $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$,
2) для функционала (9) *выполняется условие Якоби,*
то функционал (9) *строго положителен для любой* $h \not\equiv 0$ *из* E_0.

Сформулированная теорема является точным аналогом классической теоремы Якоби, совпадая с ней, если Γ имеет только одно ребро, т. е. является интервалом из $\mathbb{R}^1$.

□ Покажем существование такой функции $g(x)$, что функционал (9) может быть представлен в виде

$$\int\limits_{\Gamma} M\,(h' + gh)^2\, dx\,. \tag{16}$$

Неотрицательность всех значений последнего функционала очевидна, а равенство его нулю возможно лишь для функции $h_0(x)$, удовлетворяющей тождеству

$$h_0'(x) + g(x)h_0(x) = 0\,.$$

Последнее означает, что h_0 оказывается на каждом ребре Γ решением линейного однородного уравнения, и в силу нулевых значений на $\partial\Gamma$ оказывается тождественным нулём как на ребрах, примыкающих к $\partial\Gamma$, так и, рекуррентно рассуждая, на всех остальных.

Возможность представить (9) в виде (16) у нас появится, если положить

$$g = \frac{Q+\varphi}{M}\,, \tag{17}$$

а в качестве φ взять функцию

$$\varphi = -\frac{Mz'}{z}\,, \tag{18}$$

где z – существующее по условию Якоби строго положительное решение уравнения (13), удовлетворяющее условиям (14). Покажем это.

Вычтя из правой части (9) интеграл, полученный из (16) после замены (17), будем иметь

$$-\int\limits_{\Gamma} \varphi(h^2)'\,dx + \int\limits_{\Gamma} (N - Mg^2)h^2dx \;+ \sum_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)} R_a h^2(a)\,. \tag{19}$$

Проинтегрируем по частям первый из последних двух интегралов (напомним, a_i – начало ребра γ_i, b_i – конец ребра γ_i, в смысле его ориентации):

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi(h^2)'dx = \sum_{i=1}^{m} \left[\varphi_i h^2\right]_{a_i}^{b_i} - \int\limits_{\Gamma} \varphi' h^2 dx =$$

$$= -\sum_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)} \sum_{\gamma_i\in\Gamma(a)} æ_i(a)\varphi_i(a)h^2(a) - \int\limits_{\Gamma} \varphi' h^2 dx\,.$$

Пользуясь (18), получим отсюда

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi(h^2)'dx = \sum_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)} \sum_{\gamma_i\in\Gamma(a)} æ_i(a)\frac{M_i(a)z_i'(a)}{z(a)}h^2(a) - \int\limits_{\Gamma} \varphi' h^2 dx =$$

$$= \sum_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)} \frac{h^2(a)}{z(a)} \sum_{\gamma_i\in\Gamma(a)} æ_i(a)M_i(a)z_i'(a) - \int\limits_{\Gamma} \varphi' h^2 dx\,.$$

С учетом условий (14) отсюда получаем

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi(h^2)'dx = \sum_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)} \frac{h^2(a)}{z(a)}\,R_a z(a) - \int\limits_{\Gamma} \varphi' h^2 dx =$$

$$= \sum_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)} R_a h^2(a) - \int\limits_{\Gamma} \varphi' h^2 dx\,.$$

Таким образом, выражение (19) принимает вид

$$\int\limits_{\Gamma} (\varphi' + N - Mg^2)h^2\,dx\,.$$

Выражение, стоящее здесь множителем при h^2, после окончательной замены g на выражение (17) примет вид

$$\varphi' + N - \frac{(Q+\varphi)^2}{M}\,,$$

что с учетом (18) может быть записано в виде

$$-\frac{(Mz')'}{z} + 2Q\frac{z'}{z} - \frac{Q^2}{M} + N\,.$$

Это, с точностью до множителя, совпадает с левой частью уравнения (13), оказываясь, стало быть, тождественным нулем. ■

Допустим теперь, что Q' существует и обладает C-свойством, и обратимся к аналогу уравнения Якоби, отличному от (13): к уравнению

$$(Mz')' - (N - Q')z = 0 \tag{20}$$

(на $R(\Gamma)$) при условиях трансмиссии

$$\sum_{\gamma_i\in\Gamma(a)} æ_i(a)M_i(a)z_i'(a) + \left[\sum_{\gamma_i\in\Gamma(a)} æ_i(a)Q_i(a) - R_a\right] z(a) = 0, \quad a\in\mathcal{J}(\Gamma)\,. \tag{21}$$

Определение 4. *Скажем, что функционал* (9) *удовлетворяет условию Якоби второго типа, если уравнение* (20) *при условиях трансмиссии* (21) *имеет решение без нулей на* $\Gamma\cup\partial\Gamma$.

Теорема 4. *Пусть* $\partial\Gamma\neq\emptyset$. *Пусть* M, Q *и* N *удовлетворяют условиям теоремы 3 и, к тому же,* Q' *существует и обладает* C *-свойством. Тогда если функционал* (9) *удовлетворяет условию Якоби второго типа, то значение этого функционала строго положительно для любой* $h\not\equiv 0$ *из* E_0.

□ Проинтегрируем в правой части (9) по частям второе слагаемое:

$$\int\limits_{\Gamma} 2Qhh'dx = \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\gamma_i} Q(h^2)'dx = \sum_{i=1}^{m}\Big[Qh^2\Big]_{a_i}^{b_i} - \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\gamma_i} Q'h^2dx =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\gamma_i} Q'h^2dx - \sum_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)}\sum_{\gamma_i\in\Gamma(a)} æ_i(a)Q_i(a)h^2(a)\,;$$

здесь мы учли, что в граничных вершинах функция h равна нулю, так как $h \in E_0$. Таким образом, (9) примет вид:

$$\delta^2\Phi_1(u_0)h = \int\limits_{\Gamma} \left(Mh'^2 + (N - Q')h^2\right) dx +$$

$$+ \sum_{a \in \mathcal{J}(\Gamma)} \left[R_a - \sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} æ_i(a) Q_i(a) \right] h^2(a) \,.$$

Применим теперь к этому функционалу теорему 3. Уравнение (13) (из теоремы 3) в нашем случае примет вид (20), а условия (14) – вид (21). ■

Литература

1. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. – М.: ИЛ, 1962.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976.

3. Садовничий В.А. Теория операторов / В.А. Садовничий. – М.: Высшая школа, 1999.

4. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению / Л. Янг. – М.: Мир, 1974.

5. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный. – М.: Физматлит, 2004.

6. Покорный Ю.В. Интеграл Стильтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. РАН. – 1999. – 364;2. – С.167-169.

7. Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. Об одном классе обобщённых задач Штурма-Лиувилля с разрывными решениями // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы: Тезисы докладов Международной конференции, посвящённой 103-летию со дня рождения И.Г. Петровского (XXI совместное заседание ММО и семинара им. И.Г. Петровского). – , М.: Изд-во МГУ, 2004. – С.166-167.

8. Покорный Ю.В., Покорная И.Ю., Прядиев В.Л., Рябцева Н.Н. Об интегрировании в вариационных неравенствах на пространственных сетях // Математические заметки. – 2007. – 81;6. – С.904-911.

9. Лаврентьев М., Люстерник Л. Основы вариационного исчисления. Т.1, ч. II / М. Лаврентьев, Л. Люстерник. – М.-Л.: ОНТИ, 1935.

10. 10 Покорный Ю.В. Краткий курс математической теории оптимальных задач / Ю.В. Покорный – Воронеж: ОАО "Центрально-черноземное книжное издательство 2007.

ON THE INTEGRATION IN VARIATION INEQUALITIES ON SPATIAL NETWORKS

Yu.V. Pokornyi, N.N. Ryabtseva

Voronezh State University,
Universistetskaya Pl., 1, Voronezh, 494006, Russia

Abstract. The analogue of classical Jacobi theorem about positive definiteness of the second variation for the functional is established. The functional is determined on functions of the ramified argument that has values on a spatial network (geometrical graph). The specific features of the corresponding Euler equation and the Jacobi equation are generated by the procedure of integration by parts. This procedure leads to differentiation in the sense of a agglutinate (snap-together) measures.

Key words: spatial network, differentiation on measure, integral functional, second variation, Euler equation, Jacobi equation, Jacobi theorem.

УДК 517.9

О СТАЦИОНАРНЫХ НУЛЯХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

И.П. Половинкин

Воронежский государственный университет,
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394006, Россия,
Воронежский институт инновационных систем,
ул. Березовая Роща, 54, Воронеж, 394043, Россия,
e-mail: polovinkin@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрен вопрос о топологической структуре множества нулей решения линейного однородного эллиптического уравнения, кратность которых не ниже порядка уравнения. В случае двух независимых переменных показано, что такое множество может состоять лишь из изолированных точек.

Ключевые слова: нули функции, кратность нулей решений, размерность множества стационарных нулей.

Рассмотрим область $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Пусть $P = P(x, D)$ – эллиптический оператор, определенный равенством

$$P(x, D)u \equiv \sum_{|\alpha| \leq s} p_\alpha(x) D^\alpha u\,,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ – мультииндекс,

$$|\,\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n\,, \quad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\,, \quad p_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega),\ |\alpha| \leq s,\ s \geq 2\,.$$

Рассмотрим далее в Ω линейное однородное эллиптическое уравнение

$$P(x, D)u = 0\,. \tag{1}$$

Известно (см. [1]), что всякое обобщенное решение уравнения (1) в области Ω принадлежит классу $C^\infty(\Omega)$, что будет использовано нами ниже. Далее будем использовать также традиционное обозначение $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$.

Определение 1. *Будем говорить, что точка $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \Omega$ является нулем порядка (кратности) $m \geq 1$ функции $u(x)$, если для всех мультииндексов α, удовлетворяющих условию $|\alpha| \leq m - 1$, выполняются равенства*

$$D^\alpha u(x^0) = 0\,, \tag{2}$$

но при этом найдется хотя бы один мультииндекс α, для которого $|\,\alpha| = m$ и $D^\alpha u(x^0) \neq 0$. Если же равенство (2) выполняется для всех без исключения мультииндексов α, то

точку x^0 будем называть нулем бесконечного порядка функции $u(x)$. Если $m = 1$, то точку x^0 называют простым нулем. Если же $m > 1$ или x^0 – нуль бесконечного порядка, то говорят, что точка x^0 является кратным нулем функции $u(x)$.

Согласно теореме Ароншайна-Кордеса (см., напр., [3]) при $s = 2$ ненулевое решение $u(x)$ уравнения (1) в области Ω не может иметь нулей бесконечного порядка. Поэтому если $x^0 \in \Omega$ является нулем решения $u(x)$ уравнения (1), то в некоторой окрестности точки x^0 при некотором $m \geq 1$ имеет место представление

$$u(x) = Q_m(x - x^0) + R_{m+1}(x)\,, \tag{3}$$

где

$$Q_m(x - x^0) = \sum_{|\alpha|=m} b_\alpha (x - x^0)^\alpha$$

– главная часть в представлении Тейлора, которая является однородным многочленом (формой) порядка m, а функция $R_{m+1}(x)$, будучи остаточным членом в представлении Тейлора, удовлетворяет условиям

$$R_{m+1}(x) = O(|x - x^0|^{m+1}),\ x \to x^0,\ D^\alpha R_{m+1} = O(|x - x^0|^{m+1-|\alpha|})\,,\ 1 \leq |\alpha| \leq m - 1\,. \tag{4}$$

При $s \geq 3$ мы будем предполагать, что $s \leq m < +\infty$, то есть ограничимся рассмотрением нулей, кратность которых конечна и не ниже порядка уравнения (1).

Теорема 1. *Если точка $x^0 \in \Omega$ является нулем конечного порядка не ниже s решения $u(x)$ уравнения (1), то форма $Q_m(x - x^0)$ в представлении (3) удовлетворяет условию*

$$P_0(x^0; D) Q_m(x - x^0) = 0\,,$$

где

$$P_0(x^0; D) = \sum_{|\alpha|=s} p_\alpha(x^0) D^\alpha$$

– главная часть оператора с постоянными коэффициентами $P(x^0, D)$.

□ В некоторой окрестности точки x^0 действие оператора $P(x, D)$ можно представить в виде

$$P(x; D)u = P(x^0; D)u + \sum_{|\alpha|\leq s} a_\alpha(x) D^\alpha u\,, \tag{5}$$

где $a_\alpha(x)$ суть бесконечно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию

$$a_\alpha(x) = O(|x - x^0|)\,, \quad |\alpha| \leq s\,. \tag{6}$$

В свою очередь оператор $P(x^0, D)$ является эллиптическим оператором порядка s с постоянными коэффициентами, который определен равенством

$$P(x^0; D)u = \sum_{|\alpha|\leq s} p_\alpha(x^0) D^\alpha u = \sum_{|\alpha|=s} p_\alpha(x^0) D^\alpha u + \sum_{|\alpha|\leq s-1} p_\alpha(x^0) D^\alpha u =$$

$$= P_0(x^0; D)u + \sum_{|\alpha|\le s-1} p_\alpha(x^0) D^\alpha u\,. \qquad (7)$$

При действии оператора $P(x, D)$ на функцию, представленную в виде (3), с учетом представлений (5), (7) и условия (6), будем иметь:

$$P_0(x^0; D)Q_m(x - x^0) + P_0(x^0; D)R_{m+1}(x) + \sum_{|\alpha|\le s-1} p_\alpha(x^0) D^\alpha Q_m(x - x^0) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\le s-1} p_\alpha(x^0) D^\alpha R_{m+1}(x) + \sum_{|\alpha|\le s} a_\alpha(x) D^\alpha Q_m(x - x^0) + \sum_{|\alpha|\le s} a_\alpha(x) D^\alpha R_{m+1}(x)\,. \qquad (8)$$

В тождестве (8) для главного члена имеем:

$$P_0(x^0; D)Q_m(x - x^0) = O(|x - x^0|^{m-s}).$$

Остальные члены имеют более высокий порядок малости. Поэтому мы из тождества (8) с необходимостью приходим к равенству

$$P_0(x^0; D)Q_m(x - x^0) = 0\,. \qquad \blacksquare$$

Теорема 2. *Пусть $x^0 \in \Omega$ является изолированной точкой множества нулей порядка не ниже s многочлена $Q_m(x - x^0)$ из представления (3). Тогда x^0 является является изолированной точкой множества нулей порядка не ниже s решения $u(x)$ уравнения (1).*

$\square$ Пусть точка $x^0 \in \Omega$ является нулем кратности не менее s решения $u(x)$ уравнения (1) и при этом изолированным нулем кратности не менее s функции $Q_m(x-x^0)$. Тогда в некоторой проколотой окрестности точки x^0 с некоторой постоянной $C > 0$ имеет место неравенство

$$\sum_{|\alpha|\le s-1} \frac{|D^\alpha Q_m(x - x^0)|}{|x - x^0|^{m-|\alpha|}} \ge C\,.$$

Тогда для точек этой окрестности будем иметь

$$\sum_{|\alpha|\le s-1} \frac{|D^\alpha u(x)|}{|x - x^0|^{m-|\alpha|}} = \sum_{|\alpha|\le s-1} \frac{|D^\alpha (Q_m(x - x^0) + R_{m+1}(x))|}{|x - x^0|^{m-|\alpha|}} \ge$$

$$\ge \sum_{|\alpha|\le s-1} \frac{|D^\alpha Q_m(x - x^0)|}{|x - x^0|^{m-|\alpha|}} - \sum_{|\alpha|\le s-1} \frac{|D^\alpha R_{m+1}(x)|}{|x - x^0|^{m-|\alpha|}} \ge C - \sum_{|\alpha|\le s-1} \frac{|D^\alpha R_{m+1}(x)|}{|x - x^0|^{m-|\alpha|}}\,.$$

Из равенства (4) следуют равенства

$$\sum_{|\alpha|\le s-1} \frac{|D^\alpha R_{m+1}(x)|}{|x - x^0|^{m-|\alpha|}} = O(|x - x^0|),\ x \to x^0\,.$$

Поэтому в достаточно малой проколотой окрестности точки x^0 мы будем иметь

$$\sum_{|\alpha|\leq s-1} \frac{|D^\alpha R_{m+1}(x)|}{|x-x^0|^{m-|\alpha|}} \leq \frac{C}{2}\,.$$

Отсюда для всех точек $x \neq x^0$ из этой окрестности

$$\sum_{|\alpha|\leq s-1} \frac{|D^\alpha u(x)|}{|x-x^0|^{m-|\alpha|}} \geq \frac{C}{2}\,. \qquad \blacksquare$$

Теорема 2 позволяет отвлечься от изучения структуры множества кратных нулей функции $u(x)$ и заняться изучением структуры множества кратных нулей многочлена $Q_m(x-x^0)$ при некоторой фиксированной точке $x^0 \in \Omega$.

Обозначим через G множество всех нулей кратности не менее s многочлена $Q_m(x-x^0)$ в области Ω. Для всех точек множества G выполняются соотношения

$$P_0(x^0;D)Q_m(x-x^0) = 0\,, \tag{9}$$

$$Q_m(x-x^0) = 0\,, \tag{10}$$

$$D^\alpha Q_m(x-x^0) = 0\,, \qquad 1 \leq |\alpha| \leq s-1\,. \tag{11}$$

Соотношения (10)-(11) вытекают из определения кратных нулей, а равенство (9) – из теоремы 1. В силу равенства (10) множество G является алгебраическим в $\mathbb{R}^n$. Поэтому оно может быть представлено в виде

$$G = \bigcup_{k=0}^{r} M^k\,,$$

где M^k $(k = 0,1,\ldots,r)$ – вещественно аналитическое многообразие размерности k. Пусть открытый шар $B(x^0)$ с центром в точке $x^0 \in \Omega$ лежит целиком вместе со своим замыканием в области Ω. Без ограничения общности его радиус можно считать равным 1. Обозначим через $S(x^0)$ границу этого шара, через Γ – пересечение множества G со сферой $S(x^0)$, а через Γ_k – пересечение со сферой $S(x^0)$ множества M^k $(k = 0,1,\ldots,r)$. Тогда $\Gamma = \bigcup\limits_{k=0}^{r} \Gamma_k$.

Лемма 1. *Если $x^1 = (x_1^1,\ldots,x_n^1) \in \Gamma$, то для всех точек $x \in \Omega$ вида $x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0)$, $\lambda \geq 0$ выполняются равенства (10)-(11) .*

$\square$ Доказательство этой леммы непосредственно вытекает из однородности степени $m \geq 2$ функции $Q_m(x-x^0)$. $\blacksquare$

Лемма 2. *Размерность любого многообразия Γ_k не превышает $n-2$.*

$\square$ Предположим противное: $\dim \Gamma_k = n-1$. Равенства (9)-(11) могут рассматриваться как задача Коши для уравнения (9) с данными на заведомо нехарактеристическом

вещественно аналитическом многообразии Γ_k. Согласно теореме Коши-Ковалевской решение $Q_m(x-x^0)$ этой задачи тождественно равно нулю в некоторой окрестности многообразия Γ_k, а следовательно, тождественно равно нулю, так как $Q_m(x-x^0)$ – многочлен. Противоречие доказывает лемму. ■

Лемма 2 может быть усилена. Однако для этого далее придется разделить исследования при $n = 2$ и при $n \geq 3$.

Лемма 3. *Если $n \geq 3$, то размерность любого многообразия Γ_k не превосходит $n-3$.*

□ Предположим противное. Тогда в силу леммы 2 $\dim \Gamma_k = n-2$. Но тогда, согласно лемме 1, с каждой точкой $x^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1) \in \Gamma_k$ и множество точек вида $x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0)$, $\lambda \geq 0$, состоит из кратных нулей формы $Q_m(x-x^0)$. Но множество всех таких точек образует вещественно аналитическое многообразие размерности $n-1$. Тогда снова по теореме Коши-Ковалевской $Q_m(x-x^0) \equiv 0$, $x \in \Omega$. Противоречие доказывает лемму. ■

Непосредственно из леммы 3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *При $n \geq 3$ размерность любого многообразия M^k $(k = 0, 1, \ldots, r)$ не превосходит $n-2$, то есть $r \leq n-2$.*

Теорема 4. *При $n = 2$ решение $u(x)$ уравнения (1) может иметь лишь изолированные нули кратности не менее s.*

□ Пусть $x^0 \in \Omega$ – нуль кратности не менее s функции $u(x)$. Предположим противное утверждению теоремы, то есть что x^0 – предельная точка множества нулей кратности не менее s функции $u(x)$. Тогда по теореме 2 в сколь угодно малой окрестности точки x^0 найдутся точки, в которых будут выполняться равенства (9)-(11). Зададимся произвольно малым $\delta > 0$ и зафиксируем какую-нибудь точку $x^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1) \in \Omega$ из проколотой δ-окрестности точки x^0, в которой выполняются равенства (9)-(11). В силу леммы 1 эти равенства будут выполняться и во всех точках вида $x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0)$, $\lambda \in [0; 1]$, то есть на отрезке, соединяющем точки x^0 и x^1. Отсюда, по теореме Коши-Ковалевской, $Q_m(x-x^0) \equiv 0$, $x \in \Omega$. Противоречие доказывает теорему. ■

Рассмотрим приложение теоремы 4 к исследованию линейной непрерывной модели Пу распределения дохода при условии межрегиональной торговли. В монографии Пу [3] рассмотрена макроэкономическая модель, описывающая колебания валового дохода в заданном регионе. Модель строилась из следующих предположений:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = I - sY\,, \tag{12}$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = v\frac{\partial Y}{\partial t} - I\,, \tag{13}$$

где $Y = Y(x, y, t)$ – отклонение дохода от стационарного состояния, $I = I(x, y, t)$ – уровень инвестиций, (x, y) – географические координаты точки, t – время, v – темп инвестиций, s – темп сбережений. При предположениях (12)-(13) уравнение, описывающее изменение дохода в точке (x, y), имеет вид

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \mu\frac{\partial Y}{\partial t} + sY = 0\,, \tag{14}$$

где $\mu = s + 1 - v$.

В уравнение (14) географические координаты входят как простые параметры, так что (14) является обыкновенным дифференциальным уравнением. Если же к предположениям (12)-(13) добавить предположение о межрегиональной торговле, то в первом приближении активное торговое сальдо определяется выражением

$$m\Delta Y = \beta \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) , \tag{15}$$

где β – коэффициент пропорциональности, характеризующий склонность к импортированию. Без ограничения общности можно положить $\beta = 1$. При этих предположениях уравнение (14) заменится уравнением

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial Y}{\partial t} + sY = \Delta Y \, . \tag{16}$$

Рассмотрим стационарное распределение дохода в некоторой области Ω, полагая, что функция Y зависит только от географических координат x, y и не зависит от времени t. Тогда уравнение (16) примет вид

$$\Delta Y - sY = 0 \, . \tag{17}$$

Назовем точку (x^0, y^0) точкой безнадежности модели Пу, если

$$Y(x^0, y^0) = \nabla Y(x^0, y^0) = 0.$$

Другими словами, точка безнадежности – это стационарный нуль решения уравнения (17). Такой термин оправдан тем, что в точке безнадежности доход находится на невозмущенном уровне, а кроме того, отсутствует тенденция к локальному его изменению. Множество всех точек безнадежности назовем множеством безнадежности модели Пу. В этих терминах теорема 4 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 4. *Множество безнадежности модели Пу состоит из изолированных точек безнадежности.*

Результаты, изложенные в настоящей работе, анонсированы в [4] и [5].

Автор выражает сердечную благодарность профессору В.З.Мешкову, который обратил внимание на изложенную проблему и проявлял постоянный интерес к её решению.

Литература

1. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.1 / Л. Хермандер. – М.: Мир, 1986. – 464 с.

2. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.3 / Л. Хермандер. – М.: Мир, 1987. – 696 с.

3. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика / Т. Пу. – Ижевск: Издательский дом "Удмуртский университет 2000. – 200 с.

4. Половинкин И.П. О множестве безнадежности в линейной непрерывной модели Пу распределения дохода // Системы управления и информационные технологии. – 2008. – 1.2(31). – С.253-256.

5. Половинкин И.П. О размерности множества кратных нулей решения эллиптического уравнения // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, 2-7 июля 2010. Тезисы докладов. – М., 2010. – С.149 -150.

ON STATIONARY ZEROS OF SOLUTIONS OF THE LINEAR ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

I.P. Polovinkin

Voronezh State University,
Universitetskaya Pl., 1, Voronezh, 394006, Russia,
Voronezh Institute of Innovation Systems,
Berezovaya Roscha St., 54, Voronezh, 394043, Russia,
e-mail: polovinkin@yandex.ru

Abstract. The topological structure of the zero set of solutions of linear homogeneous elliptic equations is studied. Zeroes which have multiplicities not lower then the equation order is under consideration. In the case of two independent variables it is shown that such a set can consist only of isolated points.

Key words: zeros of the functions, multiplicity of solution zeros, dimension of the stationary zeros set.

УДК 517.9

О СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ СИСТЕМЫ МОИСИЛА-ТЕОДОРЕСКУ [4)]

В.А. Полунин, А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: soldatov48@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе исследована фредгольмова разрешимость задачи Римана-Гильберта для системы Моисила-Теодореску в конечной области.

Ключевые слова: задача Римана-Гильберта, система Моисила-Теодореску, условие дополнительности, граничная задача.

Пусть конечная область $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ограничена гладкой поверхностью S и задана 2×4 – матрица $B \in C(S)$. Рассмотрим в этой области задачу Римана-Гильберта

$$Lu = F\,, \qquad Bu\big|_S = f \tag{1}$$

для оператора $L = M(\partial/\partial x)$ Моисила-Теодореску, определяемого матрицей

$$M(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_1 & 0 & -\zeta_3 & \zeta_2 \\ \zeta_2 & \zeta_3 & 0 & -\zeta_1 \\ \zeta_3 & -\zeta_2 & \zeta_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Относительно матрицы B естественно предполагать, что ее строки как элементы $\mathbb{R}^4$ линейно независимы в каждой точке поверхности S, т.е. ранг $\operatorname{rang} B = 2$ всюду на S. Ясно, что на краевое условие в (1) можно действовать слева обратимыми 2×2 матрицами $\Delta \in C(S)$. Поэтому всегда можно добиться того, чтобы строки матрицы B в каждой точке $a \in S$ образовывали пару ортогональных единичных векторов.

С вопросом разрешимости задачи (1) тесно связано так называемое условие дополнительности (Шапиро-Лопатинского) [1, 2], которому должна удовлетворять матрица B. Это условие состоит в следующем.

Пусть $a \in S$ и $n = (n_1, n_2, n_3)$ означает единичный вектор внешней нормали на поверхности S в точке a. Для любого единичного вектора $\xi \in \mathbb{R}^3$, ортогонального n, многочлен четвертой степени $\chi(z) = \det M(\xi + zn)$ не имеет вещественных корней. Обозначим через $\chi_+(z)$ – произведение сомножителей $z - \nu$, где ν пробегает множество всех корней многочлена χ в верхней полуплоскости (взятых с учетом кратности). Пусть еще

[4]Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы (госконтракты № П19 от 18.03.2010, № 02.740.11.0613 от 29.03.2010, № П693 от 20.05.2010.)

$M^*(\zeta) = [\det M(\zeta)]M^{-1}(\zeta)$ означает матрицу, присоединенную к M. Тогда по определению условие дополнительности выполнено в точке a, если для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и любого единичного вектора $\xi \in \mathbb{R}^3$, ортогонального n, из соотношений

$$\lambda_1[BM^*(\xi + zn)]_{1j} + \lambda_2[BM^*(\xi + zn)]_{2j} = \chi_+(z)p_j(z)\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant 4\,,$$

с некоторыми многочленами p_j следует $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Поскольку

$$\det M(\zeta) = -(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)^2, \quad M^{-1}(\zeta) = (\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)^{-1}M^\top(\zeta)$$

и для $\zeta = \xi + zn$ сумма $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = 1 + z^2$, то $\chi(z) = (z^2 + 1)^2$, $\chi_+(z) = (z - i)^2$ и

$$M^*(\xi + zn) = -(z^2 + 1)M^\top(\xi + zn)\,.$$

Поэтому условие дополнительности сводится к тому, что

$$\operatorname{rang}[B(a)M^\top(\xi + in)] = 2 \tag{2}$$

в каждой точке $a \in S$. Заметим, что хотя ранг матрицы B равен двум, её произведение на вырожденную матрицу $M^\top(\xi + in)$ не обязательно обладает тем же свойством.

Классический результат общей теории эллиптических уравнений [3, 4] гарантирует фредгольмовость задачи (1) в классах Гельдера при выполнении условия дополнительности.

Теорема 1. *Пусть $S \in C^{1,\mu}$ и $B \in C^{1,\mu}(S)$, так что оператор задачи (1) ограничен $C^{1,\mu}(\overline{D}) \to C^{1,\mu}(S) \times C^{\mu}(\overline{D})$. Тогда фредгольмовость этого оператора равносильна тому, что матрица $B \in C^{1,\mu}(S)$ удовлетворяет условию дополнительности.*

При определенных условиях с задачей (1) можно связать сопряженную задачу этого же типа. Рассмотрим сопряженный по Лагранжу оператор $L^* = -M^\top(\partial/\partial x)$, который вместе с L можно записать в форме

$$L = \sum_{k=1}^{3} M_k \frac{\partial}{\partial x_k}\,, \qquad L^* = -\sum_{k=1}^{3} M_k^\top \frac{\partial}{\partial x_k}$$

с соответствующими матрицами $M_k \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Тогда для любых вектор- функций $u, v \in C^1(\overline{D})$ имеем соотношение

$$(Lu)v - u(L^*v) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}[(M_k u)v] = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[u(M_k^\top v)\right]\,,$$

где выражения в квадратных скобках означают обычное скалярное произведение двух четырехкомпонентных векторов. Следовательно, по формуле Грина справедливо тождество

$$(Lu, v)_D - (u, L^*v)_D = (u, M^\top(n)v)_S\,. \tag{3}$$

где $(\cdot\,,\cdot)_S$ означают скалярные произведения, соответственно, в пространствах вектор – функций $L^2(D)$ и $L^2(S)$. Это соотношение позволяет определить слабое решение $u \in L^2(D)$ уравнения $Lu = F$ с правой частью $F \in L^2(D)$, которое должно удовлетворять тождеству $(u, L^*v)_D = (F, v)_D$ для любой функции $v \in V$, обращающейся в нуль на S. Хорошо известно [1, 3], что в случае $F \in C^\mu(\overline{D})$ любое слабое решение u является классическим и принадлежит классу $C^{1,\mu}(K)$ на каждом компакте $K \subseteq D$.

Определение слабого решения задачи (1) связано с понятием однородной сопряженной задачи к задаче (1), постановка которой зависит от возможности выбора такой $2 \times 4-$ матрицы $B^* \in C^\mu(S)$, что квадратная матрица

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{14} \\ B_{21} & \cdots & B_{24} \\ B^*_{11} & \cdots & B^*_{14} \\ B^*_{21} & \cdots & B^*_{24} \end{pmatrix} \tag{4}$$

ортогональна. Тогда для скалярного произведения векторов $p, q \in \mathbb{R}^4$ можно записать

$$p\,q = (\widetilde{B}p)(\widetilde{B}q) = (Bp)(Bq) + (B^*p)(B^*q)\,.$$

Применительно к векторам $p = u$ и $q = M^\top(n)v$ в правой части (3) это приводит к соотношению

$$(Lu, v)_D - (u, L^*v)_D = (Bu, BM^\top(n)v)_S + (B^*u, B^*M^\top(n)v)_S\,.$$

В соответствии с этим говорим, что функция $u \in L^2(D)$ есть слабое решение задачи (1), если

$$(F, v)_D - (u, L^*v)_D = (f, BM^\top(n)v)_S \tag{5}$$

для любой функции $v \in C^1(\overline{D})$, удовлетворяющей краевому условию

$$B^*M^\top(n)(v\big|_S) = 0\,. \tag{6}$$

К сожалению, в общем случае произвольной поверхности S дополнить B до ортогональной матрицы (4) не всегда удается. Следующая лемма показывает, что это построение можно всегда осуществить локально (с сохранением гладкости матрицы B).

Лемма 1. *Пусть E есть множество всех матриц $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, строки которых образуют пару ортонормальных векторов. Пусть E_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, состоит из матриц $B \in E$, у которых $i-$ый и $j-$ый столбцы линейно независимы. Тогда существует такое гладкое отображение $h:\ E_{ij} \to E$, что для $B \in E_{ij}$ матрица (4) с $B^* = hB$ ортогональна.*

□ Доказательство достаточно провести в ситуации, когда под E понимается множество $2 \times 4-$матриц, строки которых отличны от нуля и ортогональны. Не ограничивая общности можно также считать, что $j \leqslant 3$. Тогда первую строку матрицы B^* определим, полагая $B^*_{14} = 0$ и в качестве $(B^*_{11}, B^*_{12}, B^*_{13})$ выбирая векторное произведение векторов (B_{i1}, B_{i2}, B_{i3}), $i = 1, 2,$. В результате получим тройку взаимно ортогональных

векторов $B_i = (B_{i1}, B_{i2}, B_{i3}, B_{i4})$, $i = 1, 2$, и B_1^*. С точностью до ненулевого множителя оставшийся вектор B_2^* определится однозначно. В качестве него можно взять алгебраические дополнения последней строки 4×4 – матрицы, первые три строки которой составлены из B_1, B_2 и B_1^*. ■

Из леммы следует, что каждая точка поверхности S обладает такой её открытой окрестностью $G \subseteq S$, что существует матрица $B^* \in C(G)$, для которой матрица (4) ортогональна в каждой точке $y \in G$. При этом если $B \in C^\mu(G)$ или $B \in C^{1,\mu}(G)$, то и B^* принадлежит соответствующему классу. В соответствии с этим понятие слабого решения $u \in L^2(D)$, принимающего краевое условие только на G, естественно ввести с помощью тождества (5), где функция $v \in C^1(\overline{D})$ обращается в нуль на $S \setminus G$, а на G удовлетворяет краевому условию (6), т.е.

$$B^* M^\top(n) v\big|_G = 0, \qquad v\big|_{S\setminus G} = 0\,. \tag{7}$$

При этом справедлив следующий результат о локальной гладкости вплоть до границы [1, 3].

Теорема 2. *Пусть $S \in C^{1,\mu}$, $B \in C^\mu(S)$ и выполнено условие дополнительности. Пусть множество $G \subseteq S$ открыто и матрица $B^* \in C^\mu(G)$ такова, что матрица (4) ортогональна на G. Тогда любое слабое решение $u \in L^2(D)$, принимающее на G краевое условие $Bu\big|_G = g$ с правой частью $g \in C^\mu(G)$, принадлежит $C^\mu(K)$ на любом компакте $K \subseteq \overline{D}$, для которого $K \cap S \subseteq G$. Если дополнительно $B \in C^{1,\mu}(S)$ и $g \in C^{1,\mu}(G)$, то и $u \in C^{1,\mu}(K)$.*

□ В соответствии с леммой 1 покроем поверхность S конечным числом открытых множеств $G_1, \ldots, G_n$ так, чтобы для любого i существовала матрица $B_i^* \in C(G_i)$, дополняющая B до ортогональной матрицы $\widetilde{B}_i$ на всем G_i. С помощью этого покрытия можем ввести понятие слабого решения, принимающего краевое условие (1) на всей границе. С этой целью рассмотрим класс функций $v \in C(\overline{D})$, удовлетворяющих краевому условию

$$B_i^* M^\top(n) v\big|_{G_i} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\,. \tag{8}$$

На пересечении $G_i \cap G_j$ имеем соотношение $B_i^* = \Delta B_j^*$ с некоторой ортогональной $2\times 2-$ матрицей Δ, поэтому данное краевое условие определено корректно.

Утверждается, что если $u, v \in C^1(\overline{D})$ и вектор-функция v удовлетворяет (8), то

$$(Lu, v)_D - (u, L^* v)_D = (Bu, BM^\top(n) v)_S\,. \tag{9}$$

Для доказательства выберем замкнутые подмножества $S_i \subseteq G_i$ так, чтобы их объединение совпадало с S, а попарные пересечении $S_i \cap S_j$ имели поверхностную меру нуль. Тогда для четырехкомпонентных векторов $p, q \in C(S)$ можем записать

$$(p, q)_S = \sum_{j=1}^{n} \left[\int_{S_j} (Bp)(Bq)dy + \int_{S_j} (B_j^* p)(B_j^* q)dy \right]\,.$$

Применительно к $p = u$ и $q = M^\top(n) v$ с учетом (8) отсюда следует (9). ■

В результате приходим к естественному определению слабого решения задачи (1) как к тождеству (5) по всем $v \in C^1(\overline{D})$, удовлетворяющим условию (8). Заметим, что (8) является следствием (7), поэтому $i-$ое краевое условие в (8) можно рассматривать для слабого решения отдельно так, как указано выше. Кроме того, условие (8) можно рассматривать и для функций $v \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$, которые являются решением сопряженного уравнения Моисила-Теодореску $L^*v = 0$.

Таким образом, теорема 2 приводит к следующему результату.

Теорема 3. *Пусть $S \in C^{1,\mu}$, $B \in C^\mu(S)$, выполнено условие дополнительности (2) и аналогичное условие* $\operatorname{rang}[B_j^* M(\xi + in)] = 2$ *всюду на G_j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда любое слабое решение $u \in L^2(D)$ задачи (1) с правыми частями $F \in C^\mu(\overline{D})$, $f \in C^\mu(S)$ и любое решение $v \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$ однородной сопряженной задачи*

$$L^*v = 0, \qquad B_i^* M^\top(n) v\big|_{G_i} = 0\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\,. \tag{10}$$

принадлежат классу $C^\mu(\overline{D})$. Если дополнительно $B, f \in C^{1,\mu}(S)$, то и $u, v \in C^{1,\mu}(\overline{D})$.

□ Доказательство почти очевидно. Существует столь малое $r > 0$, что любой компакт $K \subseteq \overline{D}$ диаметра меньше r либо целиком лежит в D, либо $K \cap S \subseteq G_i$ для некоторого i. В первом случае, очевидно, функции $u, v \in C^{1,\mu}(K)$. Во втором случае функция u принимает краевое условие (1) на S_i в слабом смысле и это же верно по отношению к $i-$ому краевому условию (9) для v. Поэтому остается воспользоваться теоремой 2. ■

Является весьма вероятным, что условие на B_j^* в теореме излишне и является следствием (2). Было бы желательно дать прямое доказательства этого факта.

Применительно к слабым решениям теорема 1 допускает следующий аналог[3, 4].

Теорема 4. *В условиях теоремы 3 однородная задача (1) и однородная сопряженная задача (10) имеют конечное число линейно независимых решений, соответственно, $u_1, \dots u_k \in C^\mu(\overline{D})$ и $v_1, \dots v_{k'} \in C^\mu(\overline{D})$. Неоднородная задача (1) разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности*

$$(F, v)_D - (f, BM^\top(n) v_j)_S = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant k'.$$

При этом разность $k - k'$ совпадает с индексом оператора теоремы 1.

Литература

1. Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. Comm. Pure Appl. Math., 1964, 17, 35-92.

2. Янушаускас А. Методы теории потенциала в теории эллиптических уравнений / А. Янушаускас. – Вильнюс: Мокслас, 1990. – 264с.

3. Назаров С.А, Пламеневский Б.А., Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей, М., Наука, 1991, 356с.

4. Ройтберг Я.А., Шефтель Э.Г., Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложения // Матем. сборник.–1969. Т.78, №3.–с. 446–472.

ABOUT AN ADJOINT RIEMANN-GILBERT PROBLEM FOR THE MOISIL-THEODORESCU SYSTEM

Polunin V.A., Soldatov A.P.

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: soldatov48@mail.ru

Abstract. The Fredholm solvability of Riemann-Hilbert problem for the Moisil-Teodorescu system in a finite domian is studied.

Key words: Riemann-Gilbert problem, Moisil-Theodorescu system, complementarity condition, boundary value problem.

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

А.В. Скороход

Поволжская государственная социально-гуманитарная академия,
ул. Антонова-Овсеенко, Самара, 443090, Россия, e-mail: scorohodav@yandex.ru

Аннотация. Для уравнения, которое меняет тип на прямой $y = 0$, в области, ограниченной при $y > 0$ кусочно-гладкой кривой с концами в точках $(-1, 0)$ и $(1, 0)$, и отрезками прямых $x = -1$, $y = x$, $x = 1$, $y = -x$ при $y < 0$, изучаются задачи типа Геллерстедта с нелокальными интегральными условиями сопряжения. Методом экстремума доказана единственность решения поставленных задач. Существование решения задач эквивалентно редуцируется к однозначной разрешимости интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, нелокальные задачи, принцип экстремума, единственность решения, существование решения, интегральное уравнение.

1. Постановка задач. Полученные результаты

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$L(u) \equiv \begin{cases} y^m u_{xx} + u_{yy} = 0\,, & y > 0\,, \quad m > 0\,, \\ u_{xy} - \dfrac{q}{x-y}(u_x - u_y) = 0\,, & y < 0\,, \quad x < 0\,, \\ u_{xy} + \dfrac{q}{x+y}(u_x + u_y) = 0\,, & y < 0\,, \quad x > 0\,, \quad q = \dfrac{m}{2(m+2)}\,, \end{cases} \tag{1}$$

в области D, ограниченной при $y > 0$ кусочно-гладкой кривой Γ, с концами в точках $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$, и отрезками прямых $x = -1$, $y = x$, $y = -x$, $x = 1$ при $y < 0$.

При $y > 0$ уравнение (1) совпадает с обобщенным уравнением Трикоми, а при $y < 0$ то же самое уравнение записано в характеристических координатах, что позволяет при минимальных условиях на граничные функции доказать существование классического (а не обобщённого, как было в работах К.И. Бабенко [1] и других) решения в области гиперболичности.

Обозначим через $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_-^1 = D \cap \{x < 0,\, y < 0\}$, $D_-^2 = D \cap \{x > 0,\, y < 0\}$, $D_- = D_-^1 \cup D_-^2$.

Для уравнения (1) в области D поставим следующие краевые задачи типа Геллерстедта с интегральными условиями сопряжения.

Задача V_1**.** Найти в области D функцию $u(x,\,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,\,y) \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^2(D_+) \cap C^1(D_-)\,, \quad u_{xy} \in C(D_-)\,; \tag{2}$$

$$Lu \equiv 0\,, \qquad (x,\,y) \in D_+ \cup D_-\,; \tag{3}$$

$$u(x,\,y)|_\Gamma = \varphi(s)\,, \quad 0 \le s \le l\,; \tag{4}$$

$$u(-1,\,y) = \psi_1(y)\,, \quad u(1,\,y) = \psi_2(y)\,, \qquad y \in [-1,\,0]\,; \tag{5}$$

$$u_y(x,\,+0) = -v_-^1(x)\,, \quad x \in (-1,\,0)\,, \quad u_y(x,\,+0) = v_-^2(x)\,, \quad x \in (0,\,1)\,. \tag{6}$$

Здесь

$$v_-^1(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_x^0 (t-x)^{-\lambda}\,u_1(t,\,0)\,dt\,+$$

$$+\int\limits_x^0 (t-x)^{-\lambda}\,u_2(x,\,t)\,dt\,, \qquad 0<\lambda<1,\ x \in (-1,\,0)\,. \tag{7}$$

При этом $u_1(x,\,y)$ – решение задачи Гурса для уравнения (1) в области D_-^1 с данными: $u_1(x,\,0) = \tau_1(x)\,, -1 \le x \le 0$, $\tau_1(-1) = 0$, $u_1(-1,\,y) = 0$, $-1 \le y \le 0$; $u_2(x,\,y)$ – решение задачи Гурса для уравнения (1) в области D_-^1 с данными: $u_2(x,\,0) = 0$, $-1 \le x \le 0$, $u_2(-1,\,y) = \psi_1(y)\,, -1 \le y \le 0$, $\psi_1(0) = 0$. Далее,

$$v_-^2(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x (x-t)^{-r}\,u_1(t,\,0)\,dt\,+$$

$$+\int\limits_0^x (x-t)^{-r}\,u_2(x,\,-t)\,dt\,, \qquad 0<r<1,\ x \in (0,\,1)\,, \tag{8}$$

где $u_1(x,\,y)$ – решение задачи Гурса для уравнения (1) в области D_-^2 с граничными условиями: $u_1(x,\,0) = \tau_2(x)\,, 0 \le x \le 1$, $\tau_2(1) = 0$, $u_1(1,\,y) = 0$, $-1 \le y \le 0$; $u_2(x,\,y)$ – решение задачи Гурса для уравнения (1) в области D_-^2 с граничными условиями: $u_1(x,\,0) = 0$, $0 \le x \le 1$, $u_2(1,\,y) = \psi_2(y)\,, -1 \le y \le 0$, $\psi_2(0) = 0$; $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, $\varphi(s)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\psi_1(0) = \varphi(l)$, $\psi_2(0) = \varphi(0)$.

Задача V_2**.** Найти в области D функцию $u(x,\,y)$, удовлетворяющую условиям (2)-(4) и

$$u(x,\,x) = \psi_1(x)\,,\ x \in [-1,\,0]\,; \qquad u(x,\,-x) = \psi_2(x)\,,\ x \in [0,\,1]\,; \tag{9}$$

$$u_y(x,\,+0) = v_-^1(x)\,,\ x \in (-1,\,0)\,, \quad u_y(x,\,+0) = -v_-^2(x)\,,\ x \in (0,\,1)\,. \tag{10}$$

Здесь

$$v_-^1(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{-\lambda}u_1(t,\,0)\,dt\,+$$

$$+\int\limits_{x}^{0}(t-x)^{-\lambda}u_2(x,\,t)\,dt\,,\qquad 0<\lambda<1\,,\ x\in(-1,\,0)\ ,\qquad (11)$$

где $u_1(x,\,y)$ – решение задачи Дарбу для уравнения (1) в области D_-^1 с данными: $u_1(x,\,0)=\tau_1(x)\,,\,-1\leqslant x\leqslant\ 0,\,\tau_1(0)=\ 0,\,u_1(x,\,x)=0,\,-1\leqslant x\leqslant 0$; $u_2(x,\,y)$ – решение задачи Дарбу для уравнения (1) в области D_-^1 с данными: $u_2(x,\,0)=0,\,-1\leqslant x\leqslant 0,\,u_2(x,\,x)=\psi_1(x)\,,\,-1\leqslant x\leqslant 0,\,\psi_1(0)=0$. Далее,

$$v_-^2(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{1}(t-x)^{-r}u_1(t,\,0)\,dt\,+$$

$$+\int\limits_{0}^{x}(x-t)^{-r}u_2(x,\,-t)\,dt\,,\qquad 0<r<1,\ x\in(0,\,1)\ ,\qquad (12)$$

где $u_1(x,\,y)$– решение задачи Дарбу для уравнения (1) в области D_-^2 с граничными условиями: $u_1(x,\,0)=\tau_2(x)\,,\,0\leqslant x\leqslant 1,\,\tau_2(0)=0,\,u_1(x,\,-x)=0,\,-1\leqslant x\leqslant 0$; $u_2(x,\,y)$ – решение задачи Дарбу для уравнения (1) в области D_-^2 с граничными условиями: $u_1(x,\,0)=0,\,0\leqslant x\leqslant 1,\,u_2(x,\,-x)=\psi_2(x)\,,\,-1\leqslant x\leqslant 0,\,\psi_2(0)=0$; $\psi_1(x),\,\psi_2(x),\,\varphi(s)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Заметим, что в нашем рассмотрении уравнения (1) вместо классических задач Геллерстедта предлагаются видоизмененные задачи с интегральными условиями сопряжения (6) и (10). Введение этих новых условий сопряжения вызвано тем, что линия изменения типа $y=0$ является характеристикой уравнения (1) при $y\leq 0$. В силу этого известное условие сопряжения $u_y(x,\,+0)=u_y(x,\,-0)$ не подходит. Если принять последнее условие, то в области гиперболичности должна быть корректно поставленной задача Коши для уравнения (1) с граничными условиями $u(x,\,0)=\tau(x)\,,\ u_y(x,\,0)=\nu(x)$. Такая задача в силу теоремы Коши-Ковалевской поставлена некорректно.

Задачи с подобным нелокальным интегральным условием сопряжения для уравнений смешанного типа изучались в работах [2]-[4]. В данной статье методом экстремума доказана единственность решения задач V_1 и V_2, а существование эквивалентно сведено к однозначной разрешимости интегральных уравнений Фредгольма II рода.

2. Задача V_1

Предварительно в областях D_-^1 и D_-^2 методом Римана построим в явном виде решение задачи Гурса [5]. Исходя из этих формул, вычислим $v_-^1(x)$ и $v_-^2(x)$, заданные

формулами (7) и (8):

$$v_-^1(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_x^0 \tau_1(t)\,(t-x)^{-\lambda}\,dt + \Psi_1(x)\,, \tag{13}$$

$$v_-^2(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x \tau_2(t)\,(x-t)^{-r}\,dt + \Psi_2(x)\,, \tag{14}$$

где

$$\Psi_1(x) = k_1\int\limits_x^0 (s-x)^{1-q-\lambda}\,(1+s)^q\;F\left(1-q,\,q;\,2-q-\lambda;\,\frac{s-x}{1+s}\right)\widetilde{\psi}_1(s)\;ds\,, \tag{15}$$

$$k_1 = -\frac{\Gamma(1-\lambda)\,\Gamma(2-2q-\lambda)}{\Gamma^2(2-q-\lambda)}\;, \qquad \widetilde{\psi}_1(s) = \psi_1'(s) + \frac{q}{1+s}\,\psi_1(s)\;,$$

$$\Psi_2(x) = k_2\int\limits_{-x}^0 (s+x)^{1-q-r}\,(1+s)^q\;\widetilde{\psi}_2(s)\;F\left(1-q,\,q;\,2-q-r;\,\frac{s+x}{1+s}\right)ds\,, \tag{16}$$

$$k_2 = -\frac{\Gamma(1-r)\,\Gamma(2-2q-r)}{\Gamma^2(2-q-r)}\;, \qquad \widetilde{\psi}_2(s) = \psi_2'(s) + \frac{q}{1+s}\,\psi_2(s)\;.$$

На основании представлений (13) и (14) доказан следующий принцип локального экстремума.

Лемма 1. *Пусть* $u(x,\,y) \in C\left(\overline{D}_-^1\right)$ *является решением уравнения* (1) *в области* D_-^1 и $u(-1,\,y) \equiv 0$. *Тогда, если* $\tau_1(x) = u(x,\,0)$, $\tau_1(x) \in C[-1,\,0] \cap C^1(-1,\,0)$, $\tau_1'(x)\,L_1[-1,0]$, *достигает на сегменте* $[-1,\,0]$ *наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке* $\xi \in (-1,\,0)$, *то* $v_-^1(\xi) < 0$ $(v_-^1(\xi) > 0)$.

Лемма 2. *Пусть* $u(x,\,y) \in C\left(\overline{D}_-^2\right)$ *является решением уравнения* (1) *в области* D_-^2 *и* $u(1,\,y) \equiv 0$. *Тогда, если* $\tau_2(x) = u(x,\,0)$, $\tau_2(x) \in C[0,\,1] \cap C^1(0,\,1)$, $\tau_2'(x)\,L_1[0,1]$, *достигает на сегменте* $[0,\,1]$ *наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке* $\xi \in (0,\,1)$, *то* $v_-^2(\xi) > 0$ $(v_-^2(\xi) < 0)$.

Подробное доказательство этих лемм приведено в работе автора [5].

На основании лемм 1 и 2 установлен принцип экстремума для уравнения (1) в смешанной области D.

Лемма 3. *Пусть функция* $u(x,\,y)$ *удовлетворяет условиям* (2), (3), (6) *и* $u(-1,\,y) = u(1,\,y) \equiv 0$. *Тогда, если* $\max\limits_{\overline{D}_+} u(x,\,y) = u(Q) > 0$ $(\min\limits_{\overline{D}_+} u(x,\,y) = u(Q) < 0)$, *то максимум (минимум)* $u(Q)$ *достигается на кривой* Γ.

Доказательство проводится по схеме, предложенной в работе [7]. При доказательстве данной леммы основная трудность заключалась в том, что надо было показать, что максимум решения $u(x,\,y)$ по замкнутой области $\overline{D}$ не может достигаться в угловой точке (0,0) границы области D.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2)-(6), *то оно единственно.*

□ Пусть $u(x,\,y)$ – решение однородной задачи (2)-(6), где $\varphi(s)\equiv 0$, $\psi_1(y)\equiv 0$, $\psi_2(y)\equiv 0$. Покажем, что $u(x,\,y)\equiv 0$ в D_+. Предположим, что существует точка $(x_1,\,y_1)\in D_+$ такая, что $u(x_1,\,y_1)\neq 0$. Пусть для определенности $u(x_1,\,y_1)>0$. Тогда $\max\limits_{\overline{D}^+} u(x,\,y)=u(Q)>0$ и по доказанной лемме 3 точка $Q\in\Gamma$, что противоречит тому, что $u(x,\,y)\equiv 0$ на кривой Γ. Следовательно, $u(x,\,y)\equiv 0$ в D_+. Отсюда следует, что $u(x,\,0+0)=\tau(x)\equiv 0$. Тогда в силу единственности решения задачи Гурса для уравнения (1) $u(x,\,y)\equiv 0$ в замкнутых областях $\overline{D}_-^1$ и $\overline{D}_-^2$.

Доказательство существования решения задачи V_1 для простоты вычислений проводится для случая, когда кривая Γ совпадает с "нормальной" кривой Γ_0:

$$x^2+\frac{4}{(m+2)^2}\,y^{m+2}=1\,,\qquad y>0\,.$$

В области D_+ в качестве искомого решения берется решение задачи N [8, с.78] с граничными условиями: $u|_{\Gamma_0}=\varphi(x)$, $-1\le x\le 1$; $u_y(x,\,0+0)=\nu(x)$, $-1<x<1$, считая известной функцию $\nu(x)$. Исходя из формулы решения задачи N при $y\to 0+0$, найдем функциональное соотношение между функциями $\tau(x)=u(x,\,0{+}0)$ и $\nu(x)=u_y(x,\,0{+}0)$:

$$\tau(x)=-k\int\limits_{-1}^{1}\nu(t)\left[|x-t|^{-2q}-(1-tx)^{-2q}\right]dt+\Phi(x)\,,\qquad -1\le x\le 1\,,\tag{17}$$

где

$$\Phi(x)=2kq\,(1-q)^{-2q}\left(1-x^2\right)\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)\,(1-t^2)}{(1+x^2-2xt)^{1+q}}\,dt\,,\tag{18}$$

$$k=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2q}\frac{\Gamma^2(q)}{\Gamma(2q)}\,.$$

Учитывая условия сопряжения (6), в равенстве (17) вместо $\nu(x)$ подставляем значения функций $v_-^1(x)$ и $v_-^2(x)$, заданных формулами (13) и (14). Тогда равенство (17) принимает вид

$$\tau(x)=k\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{t}^{0}\tau_1'(s)\,(s-t)^{-\lambda}\,ds\left[|x-t|^{-2q}-(1-tx)^{-2q}\right]dt\;-$$

$$-k\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t}\tau_2'(s)\,(t-s)^{-r}\,ds\left[|x-t|^{-2q}-(1-tx)^{-2q}\right]dt\;+$$

$$+ \ \widetilde{\Phi}\,(x)\ , \qquad -1 \le x \le 1, \tag{19}$$

где функция $\widetilde{\Phi}\,(x)$ определяется через функции (15), (16) и (18).

В правой части равенства (19), поменяв пределы интегрирования, вычислим внутренние интегралы. Затем, дифференцируя обе части полученного равенства, существование решения задачи V_1 сводим к вопросу разрешимости интегрального уравнения

$$\tau'\,(x) + k\int\limits_{-1}^{1} \tau'\,(s)\,K\,(x,s)\,ds = \widetilde{\Phi'}\,(x)\ , \qquad x \in (-1,0)\cup(0,1)\,, \tag{20}$$

где

$$\tau'\,(s) = \begin{cases} \tau_1'\,(s)\,, & -1 < s < 0\,, \\ \tau_2'\,(s)\,, & 0 < s < 1\,, \end{cases}$$

и явные виды ядра $K\,(x,\,s)$ и правой части $\widetilde{\Phi}'\,(x)$ приведены в работе [5].

Для ядра $K\,(x,\,s)$ и правой части $\widetilde{\Phi}'\,(x)$ интегрального уравнения (20) справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Ядро $K\,(x,\,s)$ бесконечно дифференцируемо в квадрате $\{(x,\,s):\ -1 < s, x < 1\}$, за исключением линий $x = s$, $x = -1$, $s = -1$, $x = 1$, $s = 1$, и справедлива оценка*

$$|K\,(x,\,s)\,| \le \begin{cases} C_1\left(\dfrac{1}{|x-s|^{\lambda+2q}} + \dfrac{1}{(1+x)^{\lambda+2q}} + \dfrac{1}{(1+s)^{\lambda+2q}} + \dfrac{1}{|x-s|^{2q}\,(1+s)^{\lambda}}\right), \\ \qquad\qquad x < 0\,; \\ C_2\left(\dfrac{1}{|x-s|^{r+2q}} + \dfrac{1}{(1-x)^{r+2q}} + \dfrac{1}{(1-s)^{r+2q}} + \dfrac{1}{|x-s|^{2q}\,(1-s)^{r}}\right), \\ \qquad\qquad x > 0\,, \end{cases}$$

C_i, $i = 1, 2$ – здесь и далее положительные постоянные.

Лемма 4. *В терминах приведенных выше обозначений, если имеет место*

$$\varphi(x) = (1-x^2)^{1-2q}\,\overline{\varphi}(x)\,, \quad \overline{\varphi}(x) \in C\,[-1,\,1]$$

и справедливы включения

$$\psi_1\,(y) \in C\,[-1,\,0] \cap C^1\,(-1,\,0)\ , \qquad \psi_1'\,(y) \in L_1[-1,0]\,,$$

$$\psi_2\,(y) \in C\,[0,\,1] \cap C^1\,(0,\,1)\ , \qquad \psi_2'\,(y) \in L_1[0,1]\,,$$

где $\psi_1\,(-1) = \psi_2\,(1) = 0$, то

$$\widetilde{\Phi}\,(x) \in C[-1,1] \cap C^1\,((-1,0)\cup(0,1))\ , \qquad \widetilde{\Phi}'\,(x) \in L_1[-1,1]\,.$$

Следствие 1. *Если $\lambda = r$ и существуют конечные пределы*

$$\lim_{x\to 0+0} \widetilde{\psi}_1(x)\,, \qquad \lim_{x\to 0+0} \widetilde{\psi}_2(x)\,,$$

и они равны между собой, то

$$\widetilde{\Phi}\,(x) \in C^1(-1,1)\,, \qquad \widetilde{\Phi}'\,(x) \in L_1[-1,1]\,.$$

Из теоремы 2 следует, что при $\lambda + 2q < 1$, $r + 2q < 1$ ядро $K\,(x,\,t)$ имеет особенность интегрируемого порядка на особых линиях. Поэтому уравнение (20) относится к классу интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Однозначная разрешимость интегрального уравнения (20) в классе функций $C\,((-1,0)\cup(0,1)) \cap L_1\,[-1,\,1]$ следует из теоремы единственности решения задачи V_1.

Теорема 3. *Если функции $\varphi(x)$, $\psi_1\,(y)$, $\psi_2\,(y)$ удовлетворяют условиям леммы 4 и $r + 2q < 1$, $\lambda + 2q < 1$, то существует единственное решение задачи V_1.*

3. Задача V_2.

Здесь в областях D^1_- и D^2_- методом Римана-Адамара построим в явном виде решение задачи Дарбу [6] и вычислим (11) и (12):

$$v^1_-\,(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_{-1}^{x} \tau_1\,(t)\,(x-t)^{-\lambda}\,dt + F_1(x)\,, \tag{21}$$

$$v^2_-\,(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{1} (t-x)^{-r}\,\tau_2\,(t)\,dt + F_2(x)\,, \tag{22}$$

$$F_1(x) = k_3\int\limits_{x}^{0} (s-x)^{-\lambda}\,\psi_1\,(s)\;\;ds\,, \tag{23}$$

$$F_2(x) = k_4\int\limits_{0}^{x} (x-s)^{-r}\,\psi_2\,(s)\;\;ds\,, \tag{24}$$

$$k_3 = \frac{\Gamma\,(1-q)\,\Gamma\,(2-2q-\lambda)}{\Gamma\,(2-q-\lambda)\,\Gamma\,(2-2q)}\,(1-2q)\,; \quad k_4 = \frac{\Gamma\,(1-q)\,\Gamma\,(2-2q-r)}{\Gamma\,(2-q-r)\,\Gamma\,(2-2q)}\,(1-2q)\,.$$

На основании (21) и (22) устанавливаются аналоги лемм 1 - 3 и доказывается

Теорема 4. *Если существует решение задачи V_2, то оно единственно.*

Доказательство существования решения задачи V_2 как и в случае задачи V_1 проводится для случая, когда кривая $\Gamma \equiv \Gamma_0$. Для доказательства разрешимости задачи V_2 используются решения двух вспомогательных задач: задачи N в области D_+ и задачи Дарбу в областях D_-^1 и D_-^2. Эти решения, удовлетворяя условиям сопряжения (10), существование решения задачи V_2 эквивалентно редуцируется к разрешимости интегрального уравнения

$$\tau'(x) + k\int_{-1}^{1} \tau'(s)\, H(x,s)\, ds = F'(x)\,, \qquad -1 < x < 1\,, \tag{25}$$

где явный вид $H(x,s)$ приведен в работе [6], а $F'(x)$ определяется через функции (18), (23) и (24).

Теорема 5. *Ядро $H(x,s)$ бесконечно дифференцируемо в квадрате $\{(x,\, s) :\, -1 < x, s < 1\}$, за исключением линий $x = s$, $s = 0$, $x = 0$. При этом справедлива оценка*

$$|H(x,\, s)| \le \begin{cases} C_3\left(\dfrac{1}{|x-s|^{\lambda+2q}} + \dfrac{1}{(1-xs)^{\lambda+2q}} + \dfrac{1}{|s|^r\,(-x)^{2q}}\right), & x < 0\,; \\[2ex] C_4\left(\dfrac{1}{|x-s|^{r+2q}} + \dfrac{1}{(1-xs)^{r+2q}} + \dfrac{1}{|s|^{\lambda}\,x^{2q}}\right), & x > 0\,. \end{cases}$$

Лемма 5. *В терминах приведенных выше обозначений, если имеет место*

$$\varphi(x) = (1-x^2)^{1-2q}\,\overline{\varphi}(x)\,, \qquad \overline{\varphi}(x) \in C\,[-1,\, 1]\,,$$

и справедливы включения

$$\psi_1(y) \in C\,[-1,\, 0] \cap C^1(-1,\, 0)\,, \qquad \psi_1'(y) \in L_1[-1,0]\,,$$

$$\psi_2(y) \in C\,[0,\, 1] \cap C^1(0,\, 1)\,, \qquad \psi_2'(y) \in L_1[0,1]\,,$$

где $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$, то

$$F(x) \in C[-1,1] \cap C^2(-1,1)\,, \qquad F'(x) \in L_1[-1,1]\,.$$

В силу единственности решения задачи V_2 и альтернативы Фредгольма интегральное уравнение (25) при $r + 2q < 1$, $\lambda + 2q < 1$ разрешимо в классе функций $C^1(-1,1) \cap L_1[-1,1]$ и притом единственным образом.

Теорема 6. *Если функции $\varphi(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ удовлетворяют условиям леммы 5, $r + 2q < 1$, $\lambda + 2q < 1$, то существует единственное решение задачи* (2)-(4), (9), (10).

В заключение отметим, что в данной работе в силу введения новых условий сопряжения (6) и (10) существование решения задач V_1 и V_2 напрямую редуцируется к однозначной разрешимости интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода, минуя аппарат сингулярных интегральных уравнений, в отличие от того, как это было в классических задачах Геллерстедта [8, с. 186].

Литература

1. Бабенко К.И. К теории уравнений смешанного типа // Успехи математических наук. – 1953. – VIII(2). – С. 160-161.

2. Волкодавов В.Ф., Илюшина Ю.А. Характеристический принцип локального экстремума для одного уравнения гиперболического типа и его применение // Изв. ВУЗов. Математика. – 2002. – 4;13. – С. 17-19.

3. Волкодавов В.Ф., Куликова Н.А. Задача Δ_2 для уравнения гиперболического типа с сопряжением пределов производных дробного порядка // Дифференциальные уравнения. – 2003. – 39; 12. – С. 1704-1707.

4. Волкодавов В.Ф., Наумов О.Ю. Для уравнения смешанного типа задача Т с сопряжением специального вида / Неклассические уравнения математической физики // Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 2002. – С.41-49.

5. Скороход А.В. О существовании и единственности задачи Геллерстедта для уравнения смешанного типа со специальными условиями сопряжения // Вестник СамГУ. Естественно-научная серия. – 2008. – 2;61. – С.60-68.

6. Скороход А.В. О существовании решения задачи типа Геллерстедта для уравнения смешанного типа с нелокальным условием сопряжения // Труды Стерл.филиала АН Респ. Башкортостан. Серия "Физико-математические и технические науки-/Уфа:Гилем. – 2009. – 6. – С.127-143.

7. Сабитов К.Б. О принципе максимума для уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. – 1988. – 24;11. – С.1967-1976.

8. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1985. – 304 с.

BOUNDARY PROBLEMS FOR THE EQUATION OF MIXED TYPE WITH NONLOCAL INTEGRAL CONJUGATION CONDITIONS

A.V. Scorohod

Volga region socially-humanitarian academy,
Antonova-Ovseenko St., 26, Samara, 443090, Russia, e-mail: scorohodav@yandex.ru

Abstract. The equation with changing type is studied. Such a changing takes place on the line $y = 0$ in the domain bounded by a piecewise curve with endpoints $A(-1, 0)$ and $B(1, 0)$ at $y > 0$ and by segments $x = -1$, $y = x$, $x = 1$, $y = -x$, at $y < 0$. Problems of the Gellersted type with nonlocal boundary conditions are investigated. The solution uniqueness is proved by the extremum

method. It is done by the reduction to the unique solvability of the Fredholm integral equations of second type.

Key words: mixed type equation, problem with nonlocal boundary Gellersted conditions, extremum principle, the uniqueness and existence theorem, integral equation.

УДК 517.9

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ [5)]

А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: soldatov48@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе исследована общая нелокальная задача Римана для аналитических функций в семействе весовых пространств Гёльдера. Рассмотрены вопросы фредгольмовой разрешимости задачи и асимптотика ее решений в угловых точках кусочно-гладкой границы области.

Ключевые слова: задача Римана, концевой символ, фредгольмовость, индекс, асимптотика.

Как известно [1], задача Римана-Гильберта заключается в отыскании аналитической в области D функции $\phi = u + iv$ по заданному линейному соотношению $au + bv = f$ на её граничном контуре $\Gamma = \partial D$. Полагая $G = a - ib$, это краевое условие можно записать в форме

$$\operatorname{Re} G\phi\big|_{\Gamma} = f\,. \tag{1}$$

Пусть контур Γ кусочно-гладкий и составлен из гладких дуг Γ_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, а функция G кусочно-непрерывна, более точно, сужения G_j этой функции на Γ_j непрерывны. Граничное значение функции ϕ на Γ_j обозначим $\phi_{\Gamma,j}$. Тогда (1) можем переписать в форме

$$\operatorname{Re}\, G_j\phi_{\Gamma,j} = f_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m\,.$$

Эти соотношения можно записать на одном отрезке, если задать гладкие параметризации $\gamma_j : [0,1] \to \Gamma_j$ и обозначить $\phi_{\gamma,j} = \phi_{\Gamma,j} \circ \gamma_j$. Тогда краевое условие задачи Римана – Гильберта (1) по отношению к $m-$вектор – функции $\phi_\gamma = (\phi_{\gamma,j})_1^m$ и диагональной матрицы $A = (A_i\delta_{ij})_1^m$, $A_i = G_i \circ \gamma_i$, принимает следующий вид:

$$\operatorname{Re} A\phi_\gamma^+ = f\,, \tag{2}$$

где $m-$вектор $(f_i \circ \gamma_i)_1^m$ обозначен снова f.

Аналогичная постановка, когда A является произвольной $m\times m-$ матрицей-функцией, непрерывной на Γ, приводит к новой нелокальной задаче. Наряду с (1) указанная задача была сформулирована Риманом [2] в его знаменитой докторской диссертации, однако

[5]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракты № 02.740.11.0613 от 29.03.2010г., № П693 от 20.05.2010г.)

эта постановка осталась незамеченной и не получила дальнейшего развития. Например, частным случаем (2) является известная задача Карлемана [1], поставленная им на международном математическом конгрессе в Цюрихе более чем полвека спустя.

Пусть область D ограничена двумя гладкими дугами Γ_1 и Γ_2 с общими концами в точках τ_1 и τ_2 и задан сдвиг (диффеоморфизм) $\alpha : \Gamma_1 \to \Gamma_2$, оставляющий неподвижными ее концы. Тогда задача Карлемана состоит в отыскании аналитической в D функции ϕ по краевому условию

$$(\phi^+ - G\phi^+ \circ \alpha)\big|_{\Gamma_1} = f\,. \tag{3}$$

Подчиняя параметризации дуг Γ_1 и Γ_2 условию $\gamma_2 = \alpha\circ\gamma_1$, эту задачу можем переписать в форме (2) с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -G\circ\gamma_1 \\ i & -iG\circ\gamma_1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Как известно, с задачей Римана-Гильберта связано условие нормального типа, которое заключается в обратимости функции G, или что равносильно, в обратимости диагональной матрицы $A = (A_i\delta_{ij})_1^m$, $A_i = G\circ\gamma_i$.

Аналогичный вопрос по отношению к задаче (2) решается с помощью сигнатуры ориентации σ дуг Γ_j. Параметризация γ_j наделяет эту дугу ориентацией, по отношению к которой область D может лежать как слева, так и справа. В соответствии с этим полагаем $\sigma_j = 1$ и $\sigma_j = -1$. Полученное семейство $\sigma = (\sigma_j)_1^m$ и есть сигнатура ориентаций.

С каждой $m\times m$- матрицей $A = (A_{ij})$ свяжем матрицу A^σ с элементами

$$(A^\sigma)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & \sigma_j = 1, \\ \overline{A}_{ij}, & \sigma_j = -1\,. \end{cases} \tag{5}$$

В этих обозначениях принадлежность задачи (2) к нормальному типу определяется обратимостью матрицы A^σ, т.е. условием

$$\det A^\sigma(t) \neq 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1\,.$$

Например, условимся в постановке задачи (3) дугу Γ_1 предполагать ориентированной положительно по отношению к D. Тогда $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_2 = -1$,так что в соответствии с (4), (5) можем записать

$$A^\sigma = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{G\circ\gamma_1} \\ i & i\overline{G\circ\gamma_1} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Поскольку $\det A^\sigma(t) = 2i\overline{G}\circ\gamma_1$, нормальный тип задачи Карлемана сводится к обратимости матрицы G, что согласуется с известными результатами для этой задачи.

С задачей (2) нормального типа свяжем концевой символ — аналитическую на всей плоскости матрицу-функцию $X(\zeta) = U + V(\zeta)$, где U зависит только от A^σ, а $V(\zeta)$ – от геометрии области D.

Пусть точки $\tau_1, \ldots, \tau_m$ служат концами дуг Γ_i, $1 \leq i \leq m$ (в произвольной нумерации). Пусть $\delta > 0$ выбрано столь малым, что круги с центром в точках τ_j радиуса δ

попарно не пересекаются. По отношению к концам дуги Γ_i эти круги "вырезают" две дуги Γ_i^0, Γ_i^1, причем верхний индекс 0 (1) отвечает левому (правому) концу дуги Γ_i. Пересечение области D с этими кругами дает криволинейные секторы S_i с вершиной τ_i, боковыми сторонами которых служит соответствующая пара дуг из семейства Γ_j^k. Оставшаяся часть границы ∂S представляет собой дуги окружности $|z-\delta_i|=\delta$, которую ориентируем против часовой стрелки. Левый и правый концы этой дуги лежат на боковых сторонах сектора, которые обозначим, соответственно, $\partial^0 S_i$ и $\partial^1 S_i$, и назовем, левой и правой сторонами. В результате получаем новую нумерацию $\partial^p S_i$, $1\le i\le m$, $p=0,1$, дуг $\Gamma_1^0,\dots,\Gamma_m^0,\Gamma_1^1,\dots,\Gamma_m^1$. Удобно, однако зафиксировать некоторую нумерацию $\Gamma_{(1)},\dots,\Gamma_{(2m)}$ этих дуг, не связанную с этими двумя специальными нумерациями. Таким образом, для каждого номера $k\in\{1,\dots,2m\}$ существуют единственные два элемента $(i,p),(j,q)\in\{1,\dots,m\}\times\{0,1\}$, для которых $\Gamma_{(k)}=\Gamma_i^p=\partial^q S_j$.

Введем теперь две $2m\times 2m$- матрицы U и $V(\zeta),\zeta\in\mathbb{C}$ с элементами

$$\begin{gathered} U_{kr}=[(A^{-\sigma})^{-1}A^{\sigma}]_{ij}(0)\quad\text{при}\quad \Gamma_{(k)}=\Gamma_i^0\,,\quad \Gamma_{(r)}=\Gamma_j^0,\\ U_{kr}=[(A^{\sigma})^{-1}A^{-\sigma}]_{ij}(1)\quad\text{при}\quad \Gamma_{(k)}=\Gamma_i^1\,,\quad \Gamma_{(r)}=\Gamma_j^1,\\ U_{kr}=0\quad\text{в остальных случаях}\,, \end{gathered}\tag{7}$$

$$\begin{gathered} V_{kr}(\zeta)=V_{rk}(\zeta)=e^{i\theta_j\zeta}\quad\text{при}\quad \Gamma_{(k)}=\partial^0 S_j\,,\quad \Gamma_{(r)}=\partial^1 S_j\,,\\ V_{kr}(\zeta)=0\quad\text{в остальных случаях,} \end{gathered}\tag{8}$$

где θ_j есть раствор криволинейного сектора S_j.

Мероморфная функция

$$\frac{\det[U+V(\zeta)]}{\det[1+V(\zeta)]}$$

при $\operatorname{Im}\zeta\to\pm\infty$, $\operatorname{Re}\zeta=\text{const}$ стремится к ненулевым пределам, так что проекция нулей функции $\det X(\zeta)$ на действительную ось является дискретным множеством. Пусть $\varepsilon>0$ выбрано столь малым, что эти нули отсутствуют в полосе $-\varepsilon\leqslant\operatorname{Re}\zeta<0$. Положим

$$æ_0=-\frac{1}{\pi}[\ln(\arg\det A^{\sigma})(t)]\Big|_0^1-\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{\det[U+V(\zeta)]}{\det[1+V(\zeta)]}\Big|_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty},\tag{9}$$

где выражения в квадратных скобках определяются непрерывными ветвями логарифма, а вертикальная черта означает приращение в соответствующих пределах. Легко показать, что число $æ_0$ целое.

Основной результат сформулируем в рамках весовых гёльдеровых пространств, связанных с весовой функцией

$$\rho_\lambda(z)=|z-\tau_1|^\lambda\cdots|z-\tau_m|^\lambda\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}\,.\tag{10}$$

Пусть $C^\mu(\overline{D})$, $0<\mu<1$, означает пространство функций удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ. Оно снабжается обычной нормой

$$|\varphi|=|\varphi|_0+[\varphi]_\mu\,,$$

где первое слагаемое есть sup-норма, а второе слагаемое представляет собой постоянную Гёльдера

$$[\varphi]_\mu = \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|\,\varphi(z_1) - \varphi(z_2)\,|}{|\,z_1 - z_2\,|^\mu}\,.$$

Это пространство содержится в более широком пространстве $C_0^\mu(\overline{D}) = C_0^\mu(\overline{D}; \tau_1, \ldots \tau_m)$ ограниченных функцией φ с конечной нормой

$$|\,\varphi| = |\varphi|_0 + [\rho_\mu \varphi]_\mu\,.$$

Оно состоит из всех функций вида $\varphi = \rho_\mu^{-1}\psi$, где $\psi \in C^\mu(\overline{D})$ и $\psi(\tau_1) = \ldots = \psi(\tau_m) = 0$. Ясно, что эти функции определены и ограничены в $\overline{D} \setminus \{\tau_1, \ldots \tau_m\}$. Нетрудно убедиться, что операция умножения как билинейное отображение ограничено $C_0^\mu \times C_0^\mu \to C_0^\mu$, так что пространство C_0^μ является банаховой алгеброй.

Исходя из весовой функции (10), пространство $C_\lambda^\mu(\overline{D}) = C_\lambda^\mu(\overline{D}; \tau_1, \ldots \tau_m)$ определим как класс функций $\varphi = \rho_\lambda \varphi_0$ с $\varphi_0 \in C_0^\mu$, оно снабжается "перенесеннной" нормой

$$|\varphi| = |\varphi_0|_{C_0^\mu}\,.$$

С возрастанием λ это пространство убывает по вложению, так что можно положить

$$C_{\lambda+0}^\mu = \bigcup_{\varepsilon>0} C_{\lambda+\varepsilon}^\mu, \quad C_{\lambda-0}^\mu = \bigcap_{\varepsilon>0} C_{\lambda-\varepsilon}^\mu\,.$$

Положим ещё $C^{\mu+0} = \bigcup_{\varepsilon>0} C^{\mu+\varepsilon}$ и пусть запись $\Gamma_j \in C^{1,\mu+0}$ означает, что $\gamma_j' \in C^{\mu+0}[0,1]$. В дальнейшем в дополнение к нормальному типу на дуги Γ_j, матрицу- функцию a и растворы θ_j секторов S_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, накладываем условия

$$\Gamma_j \in C^{1,\mu+0}, \quad a(t) \in C^{\mu+0}[0,1], \quad 0 < \theta_j < 2\pi\,. \tag{11}$$

Сформулируем основные результаты [3, 4] о фредгольмовой разрешимости задачи Римана в пространстве $C_\lambda^\mu(\overline{D})$.

Теорема 1. *Пусть*

$$\det X(\zeta) \neq 0, \quad \mathrm{Re}\,\zeta = \lambda\,. \tag{12}$$

Тогда

1) однородная задача (2) в пространстве $C_\lambda^\mu(\overline{D})$ имеет конечное число n линейно независимых решений $\phi_1, \ldots, \phi_n$, которые содержатся в классе $C_{\lambda+0}^\mu$;

2) существуют такие линейно независимые вещественные m- вектор-функции $g_1, \ldots, g_{n'} \in C_{-\lambda+0}^\mu$, что условие

$$\int_0^1 f(t) g_i(t) \frac{dt}{t(t-1)} = 0\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant n'\,,$$

необходимо и достаточно для разрешимости задачи в пространстве $C_\lambda^\mu(\overline{D})$;

3) индекс задачи $æ(\lambda) = n - n'$ *дается формулой*

$$æ(\lambda) = æ_0 + s(\lambda) + 2 - d\,, \tag{13}$$

где $s(\lambda)$ *есть число нулей функции* $\det X(\zeta)$ *в замкнутой полосе между прямыми* $\operatorname{Re}\zeta = 0$ *и* $\operatorname{Re}\zeta = \lambda$, *взятое с учетом кратности и знаком* $"+"$ *при* $\lambda < 0$ *и знак* $"-"$ *при* $\lambda > 0$, *а* d *есть число связных компонент контура* $\Gamma = \partial D$;

4) если $\det X(\zeta) \neq 0$ *всюду в полосе* $\lambda' < \operatorname{Re}\zeta < \lambda''$, *то числа* n, n' *и функции* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ *и* $g_1, \ldots, g_{n'}$ *не зависят от* λ, $\lambda' < \lambda < \lambda''$.

Из теоремы 1 следует, что при выполнении условия (12) любое решение $\phi \in C^{\mu}_{\lambda-0}$ задачи с правой частью $f \in C^{\mu}_{\lambda+0}$ в действительности принадлежит классу $C^{\mu}_{\lambda+0}$. Рассмотрим случай, когда это условие нарушено.

Теорема 2. *Пусть функция* $\det X(\zeta)$ *допускает на прямой* $\operatorname{Re}\zeta = \lambda$ *нули* $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ *и* r_k *есть порядок полюса матрицы- функции* $X^{-1}(\zeta)$ *в точке* ζ_k. *Пусть* $\phi \in C^{\mu}_{\lambda-0}(;\tau_1, \ldots, \tau_m)$ *есть решение задачи с правой частью* $f \in C^{\mu}_{\lambda+0}([0,1];0,1)$. *Тогда в каждом секторе* $S = S_j$ *с вершиной* $\tau = \tau_j$ *функция* ϕ *представима в виде*

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=0}^{r_k-1} c_{kr}[\ln(z-\tau)]^r (z-\tau)^{\zeta_k} + \phi_0(z), \quad \phi_0 \in C^{\mu}_{\lambda+0}(\overline{S};\tau)\,, \tag{14}$$

с некоторыми $c_{kr} \in \mathbb{C}$.

Особо остановимся на частном случае этой теоремы, когда $\lambda = 0$, в этом случае классы $C^{\mu}_{\lambda\pm0}$ обозначаем кратко $C^{\mu}_{\pm0}$. Пусть в условиях теоремы $\lambda = 0$, $l = 1$ и $\zeta_1 = 0$. Если порядок полюса r_1 в точке $\zeta = 0$ равен 1, то (14) переходит в представление

$$\phi(z) = c + \phi_0(z), \quad \phi_0 \in C^{\mu}_{+0}(\overline{S};\tau) \tag{15}$$

с некоторой постоянной $c \in \mathbb{C}$. Другими словам, функция ϕ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$. В этой связи удобно ввести конечномерное расширение $C^{\mu}_{(+0)}(\overline{D})$ класса C^{μ}_{+0}, которое состоит из функций $\phi \in C^{\mu}_{-0}$, которые в каждом секторе $S = S_j$ допускают разложение вида (15). Отмеченный частный случай теоремы 2 можно сформулировать следующим образом.

Следствие. *Пусть* $\det X(\zeta) \neq 0$ *при* $\operatorname{Re}\zeta = 0$, $\zeta \neq 0$ *и матрица- функция* $[u+v(\zeta)]^{-1}$ *в точке* $\zeta = 0$ *может допускать полюс первого порядка. Тогда любое решение* $\phi \in C^{\mu}_{-0}$ *с правой частью* $f \in C^{\mu}_{+0}$ *принадлежит классу* $C^{\mu}_{(+0)}$. *В частности, целое число* $æ_0$ *является индексом задачи в этом классе.*

Теоремы 1 и 2 можно дополнить соответствующими утверждениями о гладкости. Обозначим $C^{1,\mu}_{\lambda}(\overline{D};\tau_1, \ldots, \tau_m)$ класс аналитических в D функций $\phi \in C^{\mu}_{\lambda}$, производная которых принадлежит $C^{\mu}_{\lambda-1}$. Аналогичным образом определяются и класс $C^{1,\mu}_{\lambda}([0,1];0,1)$. Ясно также, как понимать классы $C^{1,\mu}_{\lambda\pm0}$ и $C^{1,\mu+0}$.

Теорема 3. *Пусть в дополнение к (11) функция* $A \in C^{1,\mu+0}[0,1]$. *Тогда в условиях теоремы 1 любое решение* $\phi \in C^{\mu}_{\lambda}$ *задачи (2) с правой частью* $f \in C^{1,\mu}_{\lambda}$ *принадлежит*

классу $C^{1,\mu}_{\lambda}$. Аналогично если в условиях теоремы 2 функция $f \in C^{1,\mu}_{\lambda+0}$, то в разложении (14) функция $\phi_0 \in C^{1,\mu}_{\lambda+0}(\overline{S};\tau)$.

Вычисления, связанные с матричным концевым символом значительно упрощаются, если последний имеет блочно-диагональную структуру. Пусть задано разбиение E множества $\{1,2,\ldots,2m\}$ на попарно непересекающиеся подмножества $E_1,\ldots,E_n$. Тогда по определению $2m\times 2m-$матрица $X=(X_{kr})_1^{2m}$ блочно-диагональна относительно этого разбиения, если $E_{kr}=0$ при $k\in E_i, r\in E_j,\ \ i\neq j$. Ясно, что умножение таких матриц можно осуществлять поблочно по отношению к диагональным блокам $X(E_i)=(X_kr),\ k,r\in E_i$. Точно также $\det X$ равен произведению определителей этих блоков. Зависимость от ζ диагональных блоков указываем обозначением $X(\zeta,E_i)$.

Из определений (7), (8) видно, что матрицы U и V блочно-диагональны относительно разбиений Q и P, определяемых следующим образом. Первое из них состоит из двух элементов $Q^p=\{k|\ \Gamma_{(k)}=\Gamma^p_i,\ 1\leqslant i\leqslant m\},\quad p=0,1$, а второе разбиение составлено из m пар

$$P_i=\{k|\ \Gamma_{(k)}=\Gamma^p_i,\ p=0,1\}\,,\quad 1\leqslant i\leqslant m\,. \tag{16}$$

Однако в общем случае матрица $X=U+V$ не допускает какой-либо блочно-диагональной структуры.

Положение меняется, если исходная матрица A блочно-диагонально относительно некоторого разбиения $I=(I_j)$ множества $\{1,\ldots,m\}$. В этом случае можем ввести более мелкое разбиение Q с элементами

$$Q^p_j=\{k|\ \Gamma_{(k)}=\Gamma^p_i\,,\ i\in I_j\}\,,\quad p=0,1\,. \tag{17}$$

Если теперь оба разбиения P и Q являются измельчением E, т.е. каждое E_i представляется обьединением как целых элементов P, так и Q, то матрицы U и V, а вместе с ними и $X=U+V$ блочно-диагональны относительно E. Данное свойство позволяет расширить класс весовых пространств, для которых сохраняются теоремы 1-3.

Исходя из набора $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ вещественных чисел, аналогично (10) введем весовую функцию

$$\rho_\lambda(z)=|z-\tau_1|^{\lambda_1}\cdots|z-\tau_m|^{\lambda_m}\,. \tag{18}$$

При $\lambda_1=\ldots=\lambda_m$ весовой порядок λ отождествляем с $\lambda_1\in\mathbb{R}$, в этом случае (18) переходит в (10). По отношению к данной весовой функции пространство $C^\mu_\lambda(\overline{D};\tau_1,\ldots,\tau_m)$ определяется аналогично предыдущему. Это же верно и применительно к пространству $C^\mu_\lambda([0,1];0,1)$ с весовым порядком $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1)$ и весовой функцией $\rho_\lambda(t)=t^{\lambda_0}(1-t)^{\lambda_1}$ на отрезке $[0,1]$.

С весовым порядком $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$, фигурирующем в (18), свяжем семейство весовых порядков $\lambda^j=(\lambda^j_0,\lambda^j_1)$, $1\leqslant j\leqslant m$, полагая $\lambda^j_p=\lambda_i$, если дуга Γ^p_j служит боковой стороной сектора S_i. Обозначая аналогичным образом τ^j_0 и τ^j_1 концы дуги Γ_j, легко видеть, что для $\phi\in C^\mu_\lambda(\overline{D};\tau_1,\ldots,\tau_m)$ граничная функция $\phi_{\Gamma,j}$ принадлежит $C^\mu_{\lambda^j}(\Gamma_j;\tau^j_0,\tau^j_1)$ и отображение $\phi\to\phi_{\Gamma,j}$ ограничено в этих пространствах. В частности, отображение $\phi\to\phi_{\gamma,j}$ ограничено $C^\mu_\lambda(\overline{D})\to C^\mu_{\lambda^j}[0,1]$.

Удобно с λ также связать $2m-$ вектор $(\lambda_{(1)},\ldots,\lambda_{(2m)})$, который также обозначаем λ, полагая $\lambda_{(k)}=\lambda_i$, если дуга $\Gamma_{(k)}$ служит боковой стороной сектора S_i. Очевидно, его

компненты составлены из чисел λ_p^j. По аналогии с матричными диагональными блоками под $\lambda(E_i)$ условимся понимать вектор с компонентами $\lambda_{(k)}$, $k \in E_i$. В частности, двухкомонентные вектора $\lambda(P_j)$ принадлежат $\mathbb{R}$, т.е. их компоненты совпадают. Если разбиения P и Q служат измельчением разбиения E и вектора $\lambda(E_i)$ принадлежат $\mathbb{R}$ для всех i, то диагональный блок $X(\zeta, E_i)$ можно рассматривать на прямой $\operatorname{Re}\zeta = \lambda(E_i)$.

Теорема 4. *Пусть разбиения P и Q являются измельчением E и задача Римана рассматривается в семействе весовых пространств с $\lambda(E_i) \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда с незначительными изменениями теоремы 1-3 сохраняют свою силу и в этом случае. Более точно, условие (12) теоремы 1 заменяется на*

$$\det X(\zeta, E_i) \neq 0\,, \quad \operatorname{Re}\zeta = \lambda(E_i)\,,\ 1 \leqslant i \leqslant n\,, \tag{18}$$

а формула индекса (13) переходит в

$$æ_\lambda = æ_0 + \sum_1^n s_i(\lambda) + 2 - d\,, \tag{20}$$

где s_i определяется по отношению к $X(\zeta, E_i)$ как в теореме 1.

Что касается теоремы 2, то пусть ζ_i и r_i определяются как в этой теореме по отношению к $X(\zeta, E_i)$. Тогда ее утверждение справедливо в каждом секторе S_j, для которого $P_j \subseteq E_i$.

Отметим, что теоремы 1-4 справедливы и в случае, когда в постановке (2) под ϕ понимается аналитическая $l-$ вектор-функция. Соответственно элементами A_{ij} в свою очередь служат $l \times l-$ матрицы-функции. Очевидно, это же верно и по отношению к элементам матричного концевого символа. Единственное изменение, которое нужно ввести в предыдущих теоремах, это последнее слагаемое в формулах индекса (13) и (20) заменить на $l(2-d)$.

Проиллюстрируем эти результаты на примере двух задач Римана-Гильберта (3) и Карлемана (4).

Задача Римана-Гильберта.

Рассмотрим задачу (1) с обратимой кусочно непрерывной $l \times l-$ матрицей-функцией G, для которой в соответствии с (11) функции $A_i = G \circ \gamma_i \in C^{\mu+0}[0,1]$. Очевидно, для этой задачи $A = (A_i \delta_{ij})_1^m$, $\quad A_i = G \circ \gamma_i$, и

$$U = (U_k \delta_{kr})_1^{2m}, \quad U_k = \begin{cases} (A_i^{-1}\overline{A}_i)^{\sigma_i}(1)\,, & \Gamma_{(k)} = \Gamma_i^1\,, \\ (A_i^{-1}\overline{A}_i)^{-\sigma_i}(0)\,, & \Gamma_{(k)} = \Gamma_i^0\,. \end{cases}$$

В частности, её концевой символ блочно-диагонален относительно разбиения P и задачу можно рассматривать в весовом пространстве с произвольным весовым порядком $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Пусть $\tau_{(k)}$ есть конец дуги $\Gamma_{(k)}$, расположенный на контуре Γ, и $\hat{G}_k = \lim G(t)$ при $z \to \tau_{(k)}$, $z \in \Gamma_{(k)}$. Тогда $\hat{G}_k = A_i(p)$ при $\Gamma_{(k)} = \Gamma_i^p$ и предыдущее соотношение можно переписать в форме

$$U_k = \begin{cases} [(G^{-1}\overline{G})\widehat{\ }_k]^{\sigma_i}\,, & \Gamma_{(k)} = \Gamma_i^1\,, \\ ((G^{-1}\overline{G})\widehat{\ }_k]^{-\sigma_i}\,, & \Gamma_{(k)} = \Gamma_i^0\,. \end{cases}$$

Если боковая сторона сектора S_j совпадает с Γ_i^p, то значения $\sigma_i = \pm 1$ и $p = 0, 1$ между собой определенным образом связаны:

$$\sigma_i = \begin{cases} 1, & \partial^0 S_j = \Gamma_i^0\,, \\ -1, & \partial^0 S_j = \Gamma_i^1\,, \end{cases} \qquad \sigma_i = \begin{cases} -1, & \partial^1 S_j = \Gamma_i^0\,, \\ 1, & \partial^1 S_j = \Gamma_i^1\,. \end{cases}$$

Таким образом,

$$U_k = \begin{cases} (G^{-1}\overline{G})\widehat{\ }_k\,, & \Gamma_{(k)} = \partial^1 S_j\,, \\ (\overline{G}^{-1}G)\widehat{\ }_k\,, & \Gamma_{(k)} = \partial^0 S_j\,. \end{cases} \tag{21}$$

Если границу сектора S_j с вершиной τ_j ориентировать против часовой стрелки, то предельные значения $\hat{G}_k$ на дуге $\Gamma_{(k)} = \partial^p S_j$ функции G в точке τ_j можно обозначить $G(\tau_j + 0)$ для $\Gamma_{(k)} = \partial^0 S_j$ и $G(\tau_j - 0)$ для $\Gamma_{(k)} = \partial^1 S_j$. В этих обозначениях с учетом (21) для диагонального блока концевого символа имеем следующее выражение:

$$X(\zeta, P_j) = \begin{pmatrix} (\overline{G}^{-1}G)(\tau_j + 0) & e^{i\theta_j\zeta} \\ e^{i\theta_j\zeta} & (G^{-1}\overline{G})(\tau_j - 0) \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Таким образом, условие фредгольмовости задачи Римана-Гильберта в пространстве $C_\lambda^\mu(\hat{D}; \tau_1, \ldots, \tau_m)$ выразится условием

$$\det\, X(\zeta, P_j) \neq 0\,, \quad \operatorname{Re}\zeta = \lambda_j\,,$$

и при его выполнении индекс задачи дается формулой

$$æ(\lambda) = -\frac{1}{\pi}\sum_1^m \sigma_j (\arg\det G)\big|_{\Gamma_j} + æ_0 + \sum_1^m s_j(\lambda_j) + l(2-d)\,.$$

Здесь учтено, что

$$\arg(\det A_j^{\sigma_j})\big|_0^1 = \sigma_j \arg(\det G)\big|_{\Gamma_j}\,,$$

где приращение на дуге Γ_j берется в соответствии с ее ориентацией. Ясно, что эта величина не зависит от выбора ориентации. Аналогичное свойство справедливо и по отношению к концевому символу (22).

Вычисления, связанные с определителем матрицы (22) и порядков полюсов обратной матрицы можно несколько упростить. С этой целью в классе целых $n_j \times n_j$-матриц-функций $X_j(\zeta)$, $j = 1, 2$, удобно ввести следующее отношение эквивалентности: $X_1 \sim X_2$, если существуют такие целые $n_1 \times n_1-$ матрицы-функции $Y(\zeta), Z(\zeta)$, что определитель их произведения постоянен и отличен от нуля и имеет место равенство $YX_1Z = \operatorname{diag}(1, X_2)$, где для определенности $n_1 \geq n_2$ и 1 означает единичную $(n_1 - n_2) \times (n_1 - n_2)$ – матрицу (при $n_1 = n_2$ правую часть этого соотношения следует заменить на X_2). Если A, B – заданные $n \times n-$ матрицы и $z = e^{i\theta\zeta}$ – скалярная матрица того же порядка, то в этих обозначениях

$$\begin{pmatrix} A & z \\ z & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & z^{-1}A \\ B & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z - z^{-1}BA \end{pmatrix}.$$

Применительно к матрице (22) отсюда приходим к соотношению

$$X(\zeta, P_j) \sim \operatorname{diag}(e^{i\theta_j\zeta},\ e^{i\theta_j\zeta})\ \operatorname{diag}(1,\ e^{2i\theta_j\zeta} - x_j) \tag{23}$$

с $l \times l-$ матрицей $x_j = (G^{-1}\overline{G})(\tau_j - 0)(\overline{G}^{-1}G)(\tau_j + 0)$. В частности, нули концевого символа $\det X(\zeta, P_j)$ и порядки полюсов матрицы $X^{-1}(\zeta, P_j)$ целиком определяются через собственные значения (включая их кратности и порядки) матрицы x_j.

Задача Карлемана.

Рассмотрим задачу (3) с обратимой кусочно непрерывной $l \times l-$ матрицей-функцией G, для которой $G \circ \gamma_1 \in C^{\mu+0}[0,1]$. Полагая $\sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = -1$, для матрицы A^σ имеем выражение (6). Пусть дуги Γ_j ориентированы от τ_1 к τ_2 и выбрана следующая нумерация концевых дуг:

$$\begin{matrix} \Gamma_{(1)} & \Gamma_{(2)} & \Gamma_{(3)} & \Gamma_{(4)} \\ \Gamma_1^0 & \Gamma_2^0 & \Gamma_2^1 & \Gamma_2^0 \end{matrix}.$$

В этой нумерации

$$\begin{matrix} \Gamma_{(1)} & \Gamma_{(2)} & \Gamma_{(3)} & \Gamma_{(4)} \\ \partial^0 S_1 & \partial^1 S_1 & \partial^0 S_2 & \partial^1 S_2 \end{matrix},$$

так что $P_1 = Q_1,\ P_2 = Q_2$ и матрица X блочно диагональна относительно P. Согласно (6)

$$(A^\sigma)^{-1}A^{-\sigma} = (2ix)^{-1}\begin{pmatrix} i\bar{x} & \bar{x} \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -x \\ -i & -ix \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ -\bar{x}^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad x = G \circ \gamma_1\,.$$

Следовательно, по отношению к $x_j = G(\tau_j)$, $j = 1, 2$ имеем:

$$X(\zeta, P_1) = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_1\zeta} - x_1 \\ e^{i\theta_1\zeta} - \bar{x}_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad X(\zeta, P_2) = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_2\zeta} - \bar{x}_2 \\ e^{i\theta_2\zeta} - x_2^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому как и в случае предыдущей задачи нули концевого символа $\det X(\zeta, P_j)$ и порядки полюсов матрицы $X^{-1}(\zeta, P_j)$ целиком определяются через собственные значения (включая их кратности и порядки) матрицы x_j. Соответственно формула индекса (13) принимает следующий вид

$$æ(\lambda) = -\frac{1}{\pi}\,(\arg\det G)\big|_{\Gamma_1} + æ_0 + \sum_1^2 s_j(\lambda_j) + l\,.$$

Теоремы 1-4 сохраняют свою силу и тогда, когда граничные дуги Γ_i области D в своих общих концах могут касаться друг друга внешним образом, т.е. когда условие (11) на растворы θ_j секторов S_j расширено до $0 < \theta_j \leqslant 2\pi$. Эти теоремы остаются справедливыми и в случае, когда границей области D служит произвольная кусочно-гладкая кривая Γ. Под последней понимается обьединение конечного числа гладких дуг, которые попарно могут пересекаться только по своим концам. Эти дуги разбиваются на два класса – простые дуги, относительно которых область лежит по одну сторону,

и разрезы. Занумеруем эти дуги в виде Γ_j, $1 \leqslant m \leqslant m$, считая разрезы дважды, и рассмотрим семейство попарно непересекающихся областей $\Delta_i \subseteq D$, $1 \leqslant m \leqslant m$, со свойством $\Gamma \cap \partial\Delta_i = \Gamma_i$ для всех i. Тогда граничное значение аналитической в D функции ϕ можем задать в виде семейства функций

$$\phi_{\Gamma,i}(t) = \lim_{z\to t,\, z\in\Delta_i} \phi(z), \qquad t \in \Gamma_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m\,,$$

по отношению к которому можем поставить задачу (2). Все дальнейшие обозначения остаются неизменными с той разницей, что некоторые из криволинейных секторов представляют собой круги с разрезом вдоль "криволинейного" радиуса, т.е. дуги, соединяющей центр круга с его границей. Сигнатура ориентации σ_i определяется как выше по отношению к области Δ_i, прилегающей к дуге Γ_i. Ясно также, как понимать пространство C^{μ}_{λ} для аналитических в области D функций.

Постановку обобщенной задачи Римана (2) можно распространить на случай нескольких областей D_i, $1 \leq i \leq n$, между собой никак не связанных. Пусть как и выше область D_i ограничена кусочно-гладкой кривой ∂D_i, составленной из гладких дуг Γ_{ij} $1 \leq j \leq m_i$, где разрезы встречаются дважды. Аналогичный смысл имеет и сигнатура ориентации σ_{ij}, криволинейные сектора S_{ij} с вершинами τ_{ij} и боковыми сторонами $\partial^0 S_{ij}, \partial^1 S_{ij}$, $1 \leq j \leq m_i$. Пусть функция ϕ_i аналитична в области D_i, $1 \leq i \leq n$. Функции ϕ_i ставится в соответствие семейство $\phi_{\Gamma,ij}$, $1 \leq j \leq m_i$ аналогично предыдущему.

Положим $m = m_1 + \ldots + m_n$ и множество $\{1, \ldots, m\}$ разобьем на n непересекающихся подмножеств O_i, $1 \leq i \leq n$, состоящих из m_i элементов. В соответствии с этим дуги Γ_{ij}, секторы S_{ij}, граничные значения $\phi_{\Gamma,ij}$ и сигнатуры σ_{ij}, $1 \leq j \leq m_i$, можем занумеровать элементами множества O_i, в результате получаем соответствующие семейства из m элементов. Тогда по отношению к $m-$ вектору $\phi_\gamma = (\phi_{\gamma,j})_1^m$ можем поставить задачу (2), которая рассматривается в классе

$$\prod_{i=1}^{n} C^{\mu}_{(\lambda_{ij})}(D_i; \tau_{ij}, 1 \leqslant j \leqslant m_i).$$

Все приведенные выше результаты остаются справедливыми и в этом более общем случае.

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968.

2. Риман Б. Сочинения / Б. Риман Б. – М.: Гостехиздат, 1948.

3. Солдатов А.П. Краевые задачи теории функций в областях с кусочно-гладкой границей. Ч.II / А.П. Солдатов. – Тбилиси: Изд-во ТГУ, Ин-т прикл. матем. им. И.Н.Векуа., 1991. – 274 с.

4. Солдатов А.П. Обобщённая задача Римана на римановой поверхности // Докл.РАН. – 1998. – 362;6. – С.735-738.

NONLOCAL RIEMANN PROBLEM OF FUNCTION THEORY

A.P. Soldatov

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: soldatov48@bsu.edu.ru

Abstract. The general nonlocal Riemann problem is investigated for analytic functions in weighted Holder's spaces. The Fredholm solvability of this problem is studied and the index formula is obtained. The solution asymptotics in corner points of the domain border is also found.

Key words: Riemann's problem, end symbol, Fredholm's solvability, index, asymptotics.

УДК 517.987

ПЛОСКИЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучаются плоские стационарные решения системы уравнений нелинейного переноса, подчиняющиеся дополнительной дифференциальной связи – условию соленоидальноости. Получено общее решение этой системы уравнений в виде формулы, полностью описывающей многообразие сильных стационарных решений.

Ключевые слова: гидродинамика идеальной жидкости, стационарные течения, условие несжимаемости.

1. Постановка задачи. Гидродинамика идеальной несжимаемой жидкости основана на описании течений посредством векторного поря $v : D \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^3$, $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ (D – область в $\mathbb{R}^3$) – т.н. *эйлерово описание*, которое определяет направление течения жидкости в каждой пространственной точке с радиус-вектором $x = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ в момент времени $t \in \mathbb{R}_+$. Система дифференциальных уравнений, которой подчиняется семейство векторных полей $v : D \mapsto \mathbb{R}^3$, параметризованное посредством $t \in \mathbb{R}_+$, получается из элементарных соображений, которые основаны на ньютоновском динамическом уравнении для элемента объёма жидкости (см., например, [1]). При условии постоянства плотности ρ, это уравнение имеет вид

$$\frac{Dv}{Dt} = f(x,t)/\rho\,, \tag{1}$$

где $f(x,t)$ – значение поля внешних сил, действующих на элемент объёма в точке с радиус-вектором x, в момент времени t, $D(\cdot)/Dt$ – т.н. полная (субстанциальная) производная, которая описывает малые линейные изменения за время dt динамического состояния этого элемента,

$$v_k\left(x + v(x,t)dt, t + dt\right) - v_k(x,t) \equiv \left(\frac{Dv_k}{Dt}\right)(x,t)dt + o(dt)\,.$$

Она, согласно определению, вычисляется по формуле

$$\frac{Dv_j}{Dt} = \frac{\partial v_j}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\,, \quad j = 1,2,3$$

(по повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование с $k = 1,2,3$). Таким образом, уравнение (1) в стандартной форме дифференциальных уравнений с частными производными выглядит следующим образом

$$\dot{v}_j + v_k \nabla_k v_j = f_j/\rho\,, \qquad j = 1,2,3\,, \tag{2}$$

где введены обозначения $\dot{v}_j = \partial v_j/\partial t$, $\nabla_k(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial x_k$.

Дифференциальное уравнение (2) для векторного поля $v(x,t)$ представляет собой систему из трёх уравнений для трёх функций $v_j(x,t)$, $j = 1,2,3$, то есть эта система является определённой. Поэтому может быть поставлена задача об описании многообразия $\mathfrak{M}(D)$ всех её решений (сильных) для фиксированной области D. Однако, в гидродинамике идеальной жидкости на решения $v(x,t)$ системы (2) накладывается дополнительное условие следующего вида

$$\nabla_k v_k = 0\,, \tag{3}$$

которое, с физической точки зрения, выражает условие несжимаемости жидкости. В этом случае для описания течений жидкости необходимы только такие решения $v_j(x,t)$, $j = 1,2,3$, удовлетворяющие также уравнению (3), которое, следуя механической терминологии, можно трактовать как дифференциальную связь, налагаемую на решения системы (2). Таким образом, требуемые для описания гидродинамических течений векторные поля удовлетворяют расширенной системе уравнений, которая является уже переопределённой, и поэтому описание многообразия $\mathfrak{M}_0(D) = \{v \in \mathfrak{M}(D) : \nabla_k v_k = 0\} \subset \mathfrak{M}(D)$ всех такого рода векторных полей усложняется. При этом важно установить насколько богато многообразие $\mathfrak{M}_0(D)$, чтобы иметь возможность описывать физически интересные течения жидкости. Следующий пример иллюстрирует то положение, при котором сужение многообразия $\mathfrak{M}(D)$ до многообразия $\mathfrak{M}_0(D)$ может быть очень существенным.

Пример. Рассмотрим так называемые *потенциальные течения*, для которых существует потенциал $\Phi(x,t)$ так, что поле представимо в виде $v_j(x,t) = \nabla_j\Phi(x,t)$, $j = 1,2,3$. В этом случае из уравнения (2) при $f_j \equiv 0$ следует

$$\nabla_j\left(\dot{\Phi} + \frac{1}{2}\,[\nabla_k\Phi]^2\right) = 0\,, \quad j = 1,2,3\,,$$

то есть

$$\dot{\Phi} + \frac{1}{2}\,[\nabla_k\Phi]^2 = C(t)$$

с произвольной функцией $C(t)$. Эта функция может быть исключена посредством замены

$$\Phi(x,t) = \Phi_0(x,t) + \int\limits_0^t C(s)ds\,.$$

Нетривиальные (отличные от постоянных) решения уравнения

$$\dot{\Phi}_0 + \frac{1}{2}\,[\nabla_k\Phi_0]^2 = 0\,, \tag{4}$$

наверняка, существуют, так как, в частности, разделяя переменные, можно положить

$$\Phi_0(x,t) = \alpha(t)\Psi(x)\,,$$

где

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2(t)} = -2\omega^2\,,$$

и поэтому

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_0}{1+2\alpha_0\omega^2 t}\,.$$

Таким образом, конструируемое решение при $\alpha_0 > 0$ является глобальным (существующим на $[0,\infty)$). Функция $\Psi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$[\nabla_k\Psi]^2 = 4\omega^2\Psi$$

с богатым многообразием решений. В частности, положив $\Psi(x) = \psi(x_1)$, имеем

$$\frac{d\psi}{dx_1} = \pm 2\omega\sqrt{\psi}\,, \qquad \psi(x_1) = \left(\psi(0) \pm \omega x_1\right)^2\,,$$

$$v = \pm 2\alpha(t)\omega x_1 e_1\,.$$

В то же время, если учесть условие несжимаемости, которое, в данном случае, принимает вид $\Delta\Phi = 0$, то, так как $\Delta\dot{\Phi} = 0$, из (4) следует $\Delta[\nabla_k\Phi]^2 = 0$ или, что эквивалентно, $[\nabla_k\nabla_l\Phi]^2 = 0$. Это означает, что след квадрата симметричной матрицы $\nabla_k\nabla_l\Phi$, $k,l = 1,2,3$ равен нулю. Поэтому и сама матрица равна нулю. Откуда $\nabla_k\nabla_l\Phi = 0$ и мы получаем, что все потенциальные поля $v_k(x,t) = \nabla_k\Phi$ из многообразия $\mathfrak{M}_0(D)$ не зависят от x. Подстановка же этих выражений в исходные уравнения (2) при $f_j = 0$ показывает, что они не зависят также от t.

Рассмотренный пример показывает насколько важно дать ответ на поставленный выше вопрос о структуре многообразия $\mathfrak{M}_0(D)$. В этой статье мы отвечаем на него в том случае, когда поле $v(x,t)$ является стационарным, то есть не зависит от t. Тогда, система (3) для поля $v : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ принимает вид

$$v_k\nabla_k v_j = 0\,, \quad j = 1,2,3\,. \tag{5}$$

Более того, мы ограничиваемся только случаем плоских течений, когда $v_3(x) = 0$ и v не зависит от x_3.

2. Стационарные решения. Описание многообразия всех решений системы уравнений (3) и (5) при $d = 2$ основано на специальном представлении их пространственных производных в виде произведения вспомогательных функций, которые подчиняются в некотором смысле более простой системе уравнений.

Введём матрицу G согласно формуле

$$(\mathsf{G})_{kl} = \nabla_k v_l\,, \quad k,l = 1,2\,.$$

Тогда из уравнений (3), (5) следует

Лемма 1.

$$\mathsf{G}^2 = 0\,. \tag{6}$$

□ Уравнение $\nabla_k v_k = 0$ означает, что $\mathrm{Sp}\mathsf{G} = 0$. Применяя операцию дивергенции к векторному уравнению (5), получим

$$\nabla_k(v_l \nabla_l v_k) = (\nabla_k v_l)(\nabla_l v_k) + v_l \nabla_l(\nabla_k v_k) = \mathrm{Sp}\,\mathsf{G}^2 = 0\,.$$

Так как для 2×2-матриц имеет место $\det \mathsf{G} = \left((\mathrm{Sp}\,\mathsf{G})^2 - \mathrm{Sp}\,\mathsf{G}^2\right)/2$, то уравнение Гамильтона-Келли [2]

$$\mathsf{G}^2 - \mathsf{G}\mathrm{Sp}\,\mathsf{G} + \det \mathsf{G} = 0$$

матрицы G сводится к (6). ■

Лемма 2. *Для того чтобы 2×2-матрица* G *обладала свойством* $\mathsf{G}^2 = 0$, *необходимо и достаточно чтобы она имела вид*

$$\mathsf{G} = u \begin{pmatrix} 1 & w^{-1} \\ -w & -1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $w : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, *причём в этой формуле возможны предельные значения* $u = 0$, $w = \infty$ *(либо* $u = 0$, $w = 0$*) так, что* $uw < \infty$ *(либо* $u/w < \infty$*).*

□ Доказательство достаточности представления (7) получается непосредственным вычислением $\mathsf{G}^2 = 0$ с матрицей вида (7).

Пусть

$$\mathsf{G} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда представление (7) получается посредством вычисления общего решения системы уравнений

$$u_{11}^2 + u_{12}u_{21} = 0\,, \quad u_{22}^2 + u_{12}u_{21} = 0\,,$$

откуда $u_{11}^2 = u_{22}^2$, и, кроме того,

$$u_{11}u_{12} + u_{12}u_{22} = 0\,, \quad u_{21}u_{11} + u_{22}u_{21} = 0\,.$$

При $u_{11} = u_{22} \equiv u \neq 0$ получаем противоречие, так как из второй пары уравнений следует $u_{12} = u_{21} = 0$ и, следовательно, из первой – $u = 0$. Если же $u = 0$, то вторая пара уравнений выполняется тождественно, а из первой следует $u_{21}u_{21} = 0$. В этом случае, либо $u_{12} = u \neq 0$, $u_{21} = 0$, либо $u_{21} = u \neq 0$, $u_{12} = 0$.

Наконец, при $u_{11} = -u_{22} \equiv u \neq 0$ вторая пара уравнений выполняется тождественно, а из первой следует $u_{12}u_{21} = -u^2$. Положив $u_{21} = -uw$, получим $u_{21} = u/w$. ■

Воспользовавшись представлением (7), запишем, согласно определению матрицы G,

$$\begin{aligned} \nabla_1 v_1 &= u\,, & \nabla_2 v_1 &= -uw\,, \\ \nabla_1 v_2 &= u/w\,, & \nabla_2 v_2 &= -u\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Для возможности такого представления необходимо и достаточно, чтобы

$$\nabla_2\nabla_1 v_1 = \nabla_2 u = -\nabla_1 uw\,, \quad \nabla_2\nabla_1 v_2 = \nabla_2(u/w) = -\nabla_1 u\,.$$

Следовательно, для выполнимости (8) необходимо и достаточно чтобы функции u и w подчинялись системе уравнений

$$\begin{array}{lcll} \nabla_1(uw) & + & \nabla_2 u & = 0\,, \\ \nabla_1 u & + & \nabla_2(u/w) & = 0\,. \end{array} \tag{9}$$

С другой стороны, если имеет место (8), то для выполнимости системы уравнений $v_l\nabla_l v_k = 0$, $k = 1, 2$ (при этом уравнение $\nabla_k v_k = 0$ удовлетворяется автоматически), необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$v_1 = wv_2\,, \tag{10}$$

в чём убеждаемся непосредственной подстановкой формул (8) в эту систему. Дифференциальное уравнение согласования (10) приводит к следующему

$$u = \nabla_1 v_1 = (\nabla_1 w)v_2 + w\nabla_1 v_2 = v_2(\nabla_1 w) + u\,,$$

то есть при $v_2 \neq 0$ должно иметь место $\nabla_1 w = 0$. Если же $v_2 = 0$, то $u = 0$ и $w = 0$ так, что $u/w < \infty$ и это отношение является функцией только от x_2. Таким образом, нами доказана

Лемма 3. *Все стационарные решения системы уравнений (3), (5) определяются на основе функций $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ и $w : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, которые удовлетворяют системе (9), в которой функция w не зависит от x_1. В частности, $u = w = 0$ так, что функция $u/w \neq 0$ не зависит от x_1.*

Замечание. Система (9) вырожденная, так как она обладает только одним инвариантом Римана (см., например, [3]). В самом деле, записав систему (9) в матрично-векторном виде

$$\mathsf{H}_1\nabla_1\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} + \mathsf{H}_2\nabla_2\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = 0\,,$$

где введены 2×2-матрицы

$$\mathsf{H}_1 = \begin{pmatrix} w & u \\ w & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 & u \\ w & -w \end{pmatrix},$$

приведём подействовав на неё слева матрицей

$$\mathsf{H}_1^{-1} = \frac{1}{uw}\begin{pmatrix} 0 & u \\ w & -w \end{pmatrix},$$

к форме

$$\nabla_1\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} + \mathsf{H}\nabla_2\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = 0\,,$$

где

$$\mathsf{H} = \frac{1}{w^2}\begin{pmatrix} w & -u \\ 0 & w \end{pmatrix}.$$

Так как матрица H треугольная с совпадающими диагональными элементами, то она имеет единственное собственное значение – инвариант Римана, равное w^{-1}.

Перейдём теперь к доказательству основного утверждения работы.

Теорема. *Многообразие стационарных решений совместной системы уравнений (3) и (5) определяется формулой*

$$v_k(x) = n_k V\left((a,x)\right)\,, \quad k = 1,2\,, \tag{11}$$

$V : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ – *непрерывно дифференцируемая функция на* $\mathbb{R}$, $(a,x) = a_1x_1 + a_2x_2$ *и постоянные векторы* $a = \langle a_1, a_2\rangle$ *и* $n = \langle n_1, n_2\rangle$ *взаимно ортогональны.*

□ Достаточность условий, перечисленных в формулировке теоремы, для того чтобы пара функций $v_k(x)$, $k = 1,2$, определяемых (11), удовлетворяла системе (3), (5) проверяется непосредственной подстановкой выражения (11) в эту систему. Необходимость же этих условий следует из Леммы 3. Сначала из пары уравнений (9), вычитанием получаем, что

$$w\nabla_1 w + \nabla_2 w = 0\,.$$

Так как, согласно лемме 3, w не зависит от x_1, то из этого уравнения следует, что w не зависит также и от x_2. Следовательно $w = \mathrm{const}$. Тогда уравнения системы (9) эквивалентны друг другу и их общим решением является $u = V'(x_1 - wx_2)$, где $V : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция. На основе общего вида функции u, из первой пары соотношений (8) получаем $v_1 = V(x_1 - wx_2)$, а из второй пары следует $v_2 = w^{-1}V(x_1 - wx_2)$. Положив $a = \langle 1, -w\rangle$, $n = \langle 1, w^{-1}\rangle$, получаем формулу (11). ■

3. Заключение. Применённый выше при решении задачи метод факторизации – представления производных поля v в форме (8) можно также применить при отыскании нестационарных плоских решений, так как леммы 1 и 2 имеют место в общем случае. Однако, в случае нестационарности сложно учитывать свойство согласованности, аналогичное (10), так как в этом случае оно содержит также частную производную по времени.

Найденный общий вид (11) стационарных плоских течений показывает, что условие несжимаемости очень сильно сужает класс возможных решений. При введении граничных условий прилипания $v|_{\partial D} = 0$ оказывается, что ненулевые решения возможны только в прямолинейных каналах с неизменных поперечным сечением. Для таких течений, в частности, известный в гидродинамике закон Бернулли становится бессодержательным.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / Л.Д. Ландау. – М.: Наука, 1988. – 732 с.

2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

3. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений / Б.Л. Рождественский. – М.: Наука, 1978. – 688 с.

PLANE STATIONARY FLOWS OF IDEAL INCOMPRESSIBLE LIQUID

Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. Plane stationary solutions of nonlinear translation equation system are studied in the case when they obey to supplementary differential tie, i.e. the solenoidality condition. General solution of this equation system is obtained, i.e. it is found the formula that describes the manifold of strong stationary solutions.

Key words: hydrodynamics of ideal liquid, stationary flows, incompressibility condition.

УДК 517.987

КОНЕЧНЫЕ КЛАСТЕРЫ НА ПЛОСКИХ МОЗАИКАХ
Часть I. Операции склеивания и разрезания графов

Е.С. Антонова, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: antonova_e_s@mail.ru

Аннотация. Комбинаторными методами даётся доказательство теоремы Г.Кестена о том, что внешняя граница конечного кластера, расположенного в бесконечном плоском графе типа мозаики, является простым циклом на сопряжённом к ней графе. При доказательстве не используется теорема К.Жордана о непрерывной простой замкнутой плоской кривой.

Ключевые слова: плоский граф, мозаика, кластер, внешняя граница, цикл.

1. Введение. Имеющиеся в настоящее время достижения в дискретной теории перколяции в направлении получения количественных математических результатов (в противоположность компьютерным экспериментам) связаны, главным образом, с кластерным разложением вероятности перколяции [1], [2], [3] и априорными оценками остатков этого разложения. Получение таких оценок основано на понятии внешней границы кластера, так как вклад каждого слагаемого в кластерном разложении допускает простую и эффективную верхнюю оценку в терминах числа вершин в этой границе. На этом пути возникает комбинаторная задача оценки числа $n(s)$ всех возможных для данного периодического графа G кластеров $W(x)$, содержащих фиксированную вершину x, которые обладают наперёд заданной мерой s внешней границы. Имеющаяся в настоящее время методика допускает решение этой задачи для плоских периодических графов. Это существенным образом связано с тем, что топологическая структура внешней границы конечного кластера на графе указанного типа (более общó, на графе типа мозаики [1]) допускает простое описание. Она представляет собой простой (т.е. несамопересекающийся) цикл на так называемом сопряжённом к G периодическом графе [1]. Поэтому оценивание числа $n(s)$ сводится к получению оценки числа циклов с заданной длиной s на сопряжённом графе, окружающих вершину x. К сожалению, не просматривается прямого обобщения такого метода оценивания величины $n(s)$ на периодические графы более общего типа и, самое главное, – непосредственного перенесения этой техники оценивания на физически интересный трёхмерный случай. Не в последнюю очередь такое положение связано с тем, что техника, на основе которой устанавливается структура внешней границы плоского периодического графа существенно основана на топологических свойствах плоскости погружения плоского периодического графа и, в частности, она использует при доказательстве соответствующей теоремы известную теорему К.Жордана (см., например, [4]) о простых непрерывных замкнутых кривых на плоскости. Между тем, уже при описании структуры внешней границы двумерного, но не плоского периодического графа, по-видимому, невозможно установление связи

свойств этой границы с топологическими свойствами непрерывных кривых на плоскости. Кажущимся выходом из создавшегося положения является использование прямых комбинаторных методов исследования, так как, в конце концов, граф, по своей математической природе, является алгебраической структурой. В связи с этим, становится актуальным построение доказательства теоремы Г.Кестена для плоских графов на основе комбинаторных методов. Именно эта задача решается в настоящей публикации. Центральным при этом является комбинаторное определение понятия грани плоского графа. В обычном подходе это понятие возникает при погружении графа в плоскость и, тем самым, связывает его с топологией плоскости. По техническим причинам статья разделена на две части. В первой части даётся введение в решаемую проблему, вводятся важные операции разрезания и склеивания графов и устанавливаются важные свойства графов, связанные с этими операциями.

2. Общие понятия теории графов. Объектом нашего изучения являются графы, множество вершин которых не более чем счётно. В связи с этим мы напомним базовые понятия теории графов.

Оперируя со множествами вершин и рёбер графов конечными или бесконечными, мы будем обозначать их большими буквами латинского и греческого алфавитов. Кардинальное число элементов каждого множества A будем обозначать посредством $|A|$. Для каждого множества B, множество всевозможных пар $\{x, y\}$ его элементов $x \in B$ и $y \in B$ мы обозначаем посредством $B^{(2)}$. Дадим теперь следующее алгебраическое определение простого, то есть неориентированного и не содержащего петель и кратных рёбер, графа.

Определение 1. *Пусть V – произвольное множество ($|V| \leqslant \aleph_0$). Графом G над V называется пара $\langle V, \Phi\rangle$, где $\Phi \subset V^{(2)}$.*

Элементы из V называются вершинами (узлами) графа G, а пары $\{x, y\} \in \Phi$ с $x \in V$, $y \in V$ называются его рёбрами (связями). Множество Φ рёбер называется множеством *смежности* графа G.

Граф G состоит из изолированных вершин, если $\Phi = \varnothing$ и $V \neq \varnothing$. Если при этом $V = \varnothing$, то граф называется пустым. Граф называется полным, если $\Phi = V^{(2)}$ и $V \neq \varnothing$.

Если пара $\{x, y\}$ является ребром графа G, то мы будем также говорить, что вершины x и y из V являются *смежными* на графе G или *находятся в отношении смежности* этого графа. Бинарное симметричное отношение смежности, определяемое множеством Φ пар смежных вершин, мы будем обозначать посредством φ. Таким образом, если $\{x, y\} \in \Phi$, то, эквивалентным образом, этот факт мы будем записывать как $x\varphi y = y\varphi x$.

Ребро $\{x, y\} \in \Phi$ называется инцидентным вершине x, ра́вно, как и вершине y. Множество рёбер, инцидентных фиксированной вершине $x \in V$ будем обозначать посредством $\Phi(x) = \{\{x, y\} \in \Phi : y \in V\}$. Кардинальное число элементов множества $\Phi(x)$ называется индексом вершины x и будет обозначаться посредством $\mathrm{ind}(x)$.

Каждому графу G можно сопоставить его вполне конкретную алгебраическую реализацию. Это позволяет сделать рассуждения с графами произвольного вида менее абстрактными. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{|V|}$ базисные векторы $\mathsf{e}_k \in \mathbb{R}^{|V|}$ с компонентами $(\mathsf{e}_k)_l = \delta_{kl}$, $k, l = 1 \div |V|$. Перенумеровав вершины графа каким-то произвольным

образом $V = \{x_1, x_2, ..., x_{|V|}\}$, сопоставим каждой вершине x_k вектор e_k, $k = 1 \div |V|$, а каждому ребру $\{x_k, x_l\} \in \Phi$ – отрезок $\gamma_{kl} = \{\alpha_k \mathsf{e}_k + \alpha_l \mathsf{e}_l : 0 \leqslant \alpha_k, \alpha_l \leqslant 1, \alpha_k + \alpha_l = 1\}$. В этом случае множество вершин V можно отождествить с множеством $\{\mathsf{e}_j; j = 1 \div |V|\}$, а множество рёбер – с множеством $\{\{x_k, x_l\} \in \Phi; k, l = 1 \div |V|\}$. Тогда граф G представляется в виде комплекса [5]

$$\mathsf{C}(G) = \langle \{\mathsf{e}_j; j = 1 \div |V|\}, \{\gamma_{kl} : \{x_k, x_l\} \in \Phi; k, l = 1 \div |V|\} \rangle \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^{|V|}.$$

Так как векторы $\{\mathsf{e}_k; k = 1 \div |V|\}$ линейно независимы, то каждая пара отрезков γ_{kl} может иметь не более одной общей точки. Эта общая точка может быть только одной из концевых точек этих отрезков и только в том случае, когда соответствующие им рёбра инцидентны одной и той же вершине графа, отображаемой в эту точку. Следовательно, на основе комплекса $\mathsf{C}(G)$ можно построить непрерывное одномерное многообразие

$$\mathsf{K}(G) = \bigcup_{\{k,l\}:\{x_k,x_l\}\in\Phi} \gamma_{kl}\,.$$

Тогда граф G можно рассматривать как пару $\langle V, \mathsf{K}(G)\rangle$, состоящую из многообразия $\mathsf{K}(G)$ и множества отмеченных на ней точек V, определяемых векторами $\{\mathsf{e}_k; k = 1 \div |V|\}$.

Каждый граф $G' = \langle V', \Phi' \rangle$ такой, что $V' \subset V$ и

$$\Phi' = \Phi \setminus \bigcup_{z \in V \setminus V'} \Phi(z) \tag{1}$$

называется *подграфом* графа G, *порождаемым* подмножеством вершин V'. В этом случае мы будем писать $G' \subset G$.

Конструкции теории графов, имеющие общий характер, условно, можно подразделить на два класса. В одном из них первичным является понятие вершины, в другом – понятие ребра. Легко видеть, что в определении понятия подграфа (см. формулу (1)) первичным является понятие вершины исходного графа G. Мы вводим аналогичное понятие, в определении которого первичными являются рёбра.

Пусть $\Phi'' \subset \Phi$. Определим множество $\{z : \Phi(z) \cap \Phi'' \neq \varnothing\}$, которое обозначим посредством $\{\Phi''\}$. Любое подмножество $\Phi'' \subset \Phi$ определяет *субграф* $G'' = \langle V', \Phi'' \rangle$, у которого $V' = \{\Phi''\}$.

Лемма 1. *При фиксированном множестве вершин $V' \subset V$, для любого множества рёбер Φ'' субграфа $G'' = \langle V', \Phi'' \rangle$ и множестве рёбер подграфа $G' = \langle V', \Phi' \rangle$ имеет место включение $\Phi'' \subset \Phi'$.*

□ Пусть $\{x, y\} \in \Phi''$. Тогда $x \in V'$ и $y \in V'$. Допустим, что

$$\{x, y\} \in \bigcup_{z \in V \setminus V'} \Phi(z)\,.$$

Тогда существует вершина $z' \in V \setminus V'$ такая, что $\{x, y\} \in \Phi(z')$, и поэтому для неё имеет место $\Phi(z') \cap \Phi' \neq \varnothing$. Следовательно $z' \in V'$. Полученное противоречие доказывает

включение

$$\{x,y\} \in \Phi \setminus \left(\bigcup_{z \in V \setminus V'} \Phi(z) \right) = \Phi' . \qquad \blacksquare$$

Очевидно, что при фиксированном множестве V' каждый субграф G'' получается из подграфа $G' = \langle V', \Phi' \rangle$ с тем же множеством вершин V' посредством удаления некоторого подмножества рёбер из множества Φ', но таким образом, чтобы при этом не появилось новых изолированных вершин.

Последовательность $\gamma = \langle x \equiv x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n \equiv y \rangle$; x_j, $j = 0 \div n$ (либо формально $n = \infty$, если последовательность бесконечна и в этом случае $j \in \mathbb{N}_+$) такая, что $x_k \varphi x_{k+1}$, $k = 0 \div (n-1)$ (в бесконечном случае $k \in \mathbb{N}_+$) называется путём, точнее, путём длины n (бесконечным путём) на графе $G = \langle V, \Phi \rangle$. При этом x является начальной вершиной пути γ, а y – его конечной вершиной. В этом случае мы будем также говорить, что путь γ связывает вершины x и y на графе G. Длину пути γ будем обозначать посредством $|\gamma|$ (для бесконечного пути она формально полагается равной ∞). Если необходимо подчеркнуть тот факт, что путь γ является связывающим для пары вершин x и y, то мы будем в этом случае записывать его в виде $\gamma(x,y)$. Если же необходимо подчеркнуть, что бесконечный путь начинается в вершине x, то мы будем его записывать в виде $\gamma(x)$. Для любого пути γ множество вершин, входящих в его состав, мы будем обозначать посредством $\{\gamma\}$.

Если все вершины пути γ различны, а именно $x_j \neq x_k$ при $j \neq k$, $j,k = 0 \div n$ (или $j,k \in \mathbb{N}_+$, если путь бесконечный), то мы будем говорить, что путь γ является *несамопересекающимся*. Если же совпадение имеется только для начальной вершины пути с конечной, то такой путь мы будем называть *циклом* длины n.

В том случае, когда в рассуждениях используется понятие пути γ не имеет значения его направление, то удобно рассматривать его как субграф γ с множеством вершин $\{\gamma\}$ и с множеством связей $\{\{x_j, x_{j-1}\}; j = 1 \div n\} = \Phi_\gamma$. В частности, любой цикл на графе можно рассматривать как связный субграф с множеством вершин $\{\gamma\}$.

Несамопересекающийся путь $\gamma = \langle x_0, ..., x_n \rangle$ (либо $\gamma = \langle x_k; k \in \mathbb{N}_+ \rangle$ для бесконечного пути) будем называть *спрямляемым*, если для какого-то $k = 0 \div (n-2)$ (либо $k \in \mathbb{N}_+$) найдётся номер $l \geqslant k+2$ такой, что $x_k \varphi x_l$. В противном случае, если указанная ситуация не реализуется, то путь называется *неспрямляемым*.

Аналогично, цикл $\langle x_0, x_1, ..., x_n \rangle$ длины n назовём спрямляемым, если существует пара различных номеров $j,k \in \{0,1,...,n\}$ такая, что $|j-k| \mod n \neq 1$, и для неё выполняется $x_j \varphi x_k$. В противном случае, цикл называется неспрямляемым.

Лемма 2. *Если несамопересекающийся путь (или цикл) γ неспрямляем, то он является подграфом с множеством вершин $\{\gamma\}$.*

$\square$ В обозначениях леммы 1 достаточно доказать, что $\Phi_\gamma = \Phi'' = \Phi'$ при $V' = \{\gamma\}$.

Пусть $\{x,y\} \in \Phi'$, где $x \in \{\gamma\}$, $y \in \{\gamma\}$. Если $\{x,y\} \notin \Phi''$ и неспрямляемый путь γ имеет вид

$$\gamma = \langle x, x_1, ..., x_m, y, x_{m+2}, ..., x_{n-1}, x_n \rangle ,$$

где $m \neq 0$ и $m+1 \neq n$, то наличие ребра $\{x, y\}$ указывает на спрямляемость этого пути вопреки предположению. ■

Определение 2. *Если для двух вершин x и y из V существует путь на графе G, то мы будем говорить, что они являются связанными на G или, что они находятся в отношении связанности.*

Отношение связанности, соответствующее графу G, мы будем обозначать посредством $\mathtt{g}$, то есть факт связанности вершин x и y на G будем записывать в виде $x\mathtt{g}y$. Очевидно, что $x\mathtt{g}y = y\mathtt{g}x$ и из соотношений $x\mathtt{g}z$, $z\mathtt{g}y$ следует $x\mathtt{g}y$. Положив формально $x\mathtt{g}x$ для любого $x \in V$, получим, что отношение $\mathtt{g}$ связанности является отношением эквивалентности (см., например, [5]), и поэтому оно разбивает всё множество V на непересекающиеся множества $V_1, ..., V_m$ эквивалентных (связанных между собой) вершин, где $V = \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$ с $V_j \cap V_k = \varnothing$ при $j \neq k$. Они, в свою очередь, порождают связанные подграфы $G_j = \langle V_j, \Phi_j \rangle$, где $\Phi_j = \Phi \cap V_j^{(2)}$, $j = 1 \div m$.

Граф G, который состоит только из одного множества эквивалентных между собой вершин, совпадающего с V, называется *связным.*

Лемма 3. *Связный граф G с $|V| \geqslant 1$, у которого каждая вершина имеет индекс 2, является неспрямляемым циклом.*

□ Возьмём произвольную вершину $x \in V$. Так как имеется, по крайней мере, ещё одна вершина во множестве V и граф G связный, то найдётся вершина $x_1 \in V$ такая, что $x\varphi x_1$. Так как $\mathrm{ind}(x_1) = 2$, то существует вершина $x_2 \in V$, $x_1\varphi x_2$. Если $x\varphi x_2$, то мы имеем три вершины, у которых индексы равны 2 и которые составляют неспрямляемый цикл. Других вершин граф не имеет, так как он должен быть связным, а всякая другая вершина уже не может быть смежной ни с одной из вершин x, x_1, x_2. Если же отношение $x\varphi x_2$ не имеет места, то процесс построения продолжается далее по индукции. Результатом построения на n-м шаге является последовательность $\gamma_n = \langle x, x_1, x_2, ..., x_n \rangle$, для которой либо её построение на этом шаге заканчивается, если $x\varphi x_n$, так как она превратилась (вместе с начальной вершиной x) в неспрямляемый цикл, либо она является неспрямляемым путём длины n, у которого отношение $x\varphi x_n$ не имеет места. При этом в первом случае построение графа G прекращается, так как нет других вершин, ввиду связности графа и равенства $\mathrm{ind}(x_l) = 2$, $l = 0, 1, ..., n$. Во втором случае $|V| > n+1$ и существует вершина x_{n+1}, для которой $x_{n+1} \neq x_1, ..., x_n$, так как индексы $x_1, ..., x_n$ равны 2. Кроме того, ни одно из отношений $x_{n+1}\varphi x_1$, ..., $x_{n+1}\varphi x_n$ не имеет места, так как путь γ_n неспрямляемый. Тогда путь $\gamma_{n+1} = \langle x, x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} \rangle$ неспрямляемый, и он либо может быть продолжен далее переходом к следующему шагу построения (если отношение $x_{n+1}\varphi x$ не имеет места), либо его построение заканчивается (если $x_{n+1}\varphi x$) и он, вместе с x представляет собой неспрямляемый цикл длины $(n+1)$. В этом последнем случае, построение графа G заканчивается, так как любая другая вершина не может быть смежной ни с одной из уже выбранных вершин и граф должен быть связным. Так как граф G конечный, то процесс построения последовательности $\langle x, x_1, x_2, ... \rangle$ должен оборваться на какой-то вершине x_k. Это возможно только в том случае, когда $x_k\varphi x$. ■

3. Операции склеивания и разрезания. Введём вспомогательные операции скле-

ивания и разрезания, на которых основаны наши дальнейшие комбинаторные построения.

Пусть G – связный граф. Вершина $z \in V$ называется вершиной *сочленения* графа G, если подграф $G' = \langle V \setminus \{z\}; \Phi \setminus \Phi(z)\rangle$ является несвязным. В противном случае, z не является вершиной сочленения графа G.

Пусть z – вершина сочленения графа G. Число связных компонент, на которые распадается граф G при удалении из него вершины z вместе со всеми инцидентными ей рёбрами назовём индексом сочленения вершины z, который мы будем обозначать посредством $\mathrm{Ind}(z)$.

Лемма 4. *Если z – вершина сочленения графа G с $Ind(z) = n$, то этому графу однозначным образом сопоставляется n подграфов $G_j = \langle V_j, \Phi_j\rangle$, $j = 1 \div n$ таких, что $V_k \cap V_l = \{z\}$, $\Phi_k \cap \Phi_l ne \varnothing$ при $k \neq l$, $k, l = 1 \div n$, и у каждого из них вершина z не является вершиной сочленения.*

□ Пусть z – вершина сочленения графа G и $G'_j = \langle V'_j, \Phi'_j\rangle$, $\Phi'_j \subset V'^{(2)}_j$, $j = 1, ..., \mathrm{Ind}(z) = n$ – связные компоненты графа G', сопоставляемого графу G согласно данному выше определению вершины сочленения. При этом $V'_k \cap V'_l = \varnothing$, $\Phi'_k \cap \Phi'_l = \varnothing$ при $k \neq l$ и

$$V = \{z\} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n} V'_j\right), \qquad \Phi = \Phi(z) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n} \Phi'_j\right). \tag{2}$$

Справедливо дизъюнктивное разложение множества рёбер

$$\Phi(z) = \bigcup_{j=1}^{n} \Sigma_j\,, \quad \Sigma_k \cap \Sigma_l = \varnothing\,, \qquad k \neq l\,,$$

где $\Sigma_j = \{\{y, z\} \in \Phi : y \in V_j\}$. Вводя множества вершин $V_j = V'_j \cup \{z\}$ и рёбер $\Phi_j = \Phi'_j \cup \Sigma_j \subset V_j^{(2)}$, получим утверждение леммы. ■

Определение 3. *Операция склеивания m различных графов $G_j = \langle V_j, \Phi_j\rangle$, $j = 1 \div m$, $V_k \cap V_l = \varnothing$, $\Phi_k \cap \Phi_l = \varnothing$ при $k \neq l$, где $k, l = 1 \div m$, каждый из которых имеет одну отмеченную вершину $x_j \in V_j$, $j = 1 \div m$, сопоставляет этому набору графов пару, состоящую из графа*

$$G = \langle (V_1)_{x_1:=z} \ \cup \ ... \ \cup \ (V_m)_{x_m:=z}, \ \ (\Phi_1)_{x_1:=z} \ \cup \ ... \ \cup \ (\Phi_m)_{x_m:=z}\rangle$$

и отмеченной на нём вершины z (здесь $:=$ – оператор присвоения).

Из этого определения видно, что порядок следования графов $G_1, ..., G_m$ при применении операции склеивания несуществен. Операцию склеивания мы будем далее обозначать следующим образом

$$\mathsf{gl}(G_1, x_1; ...; G_m, x_m) = \langle G, z\rangle\,. \tag{3}$$

Лемма 5. *Если вершины x_j, по которым производится операция склеивания m связных графов G_j, являются их вершинами сочленения с индексами $\mathrm{Ind}(x_j) = n_j \geqslant 1$, $j = 1 \div m$, то отмеченная вершина z в результирующем графе G (см. (3)) является вершиной сочленения с индексом сочленения, равном $\mathrm{Ind}(z) = n_1 + ... + n_m$.*

□ Докажем утверждение леммы при $m = 2$. Пусть в связных графах $G_1 = \langle V_1, \Phi_1\rangle$ и $G_2 = \langle V_2, \Phi_2\rangle$ отмечены вершины x_1 и x_2 соответственно, имеющие индексы сочленения $n_1 = \mathrm{Ind}(x_1)$ и $n_2 = \mathrm{Ind}(x_2)$. Обозначим $G_j^{(1)} = \langle V_{1,j}, \Phi_{1,j}\rangle$, $j = 1 \div n_1$ связные компоненты графа $\langle V_1 \setminus \{x_1\}, \Phi_1 \setminus \Phi_1(x_1)\rangle$ и посредством $G_j^{(2)} = \langle V_{2,j}, \Phi_{2,j}\rangle$, $j = 1 \div n_2$ – связные компоненты графа $\langle V_2 \setminus \{x_2\}, \Phi_2 \setminus \Phi_2(x_2)\rangle$.

Рассмотрим граф, который получается из графа

$$\langle (V_1)_{x_1:=z} \ \cup \ (V_2)_{x_2:=z}, \ (\Phi_1)_{x_1:=z} \ \cup \ (\Phi_2)_{x_2:=z}\rangle$$

удалением из него вершины z вместе со всеми рёбрами $\Phi(z)$. Так как

$$(V_1)_{x_1:=z} \ \cup \ (V_2)_{x_2:=z} \setminus \{z\} = (V_1 \setminus \{x_1\}) \cup (V_2 \setminus \{x_2\}) \,,$$

$$((\Phi_1)_{x_1:=z} \ \cup \ (\Phi_2)_{x_2:=z}) \setminus \Phi(z) = (\Phi_1 \setminus \Phi_1(x_1)) \cup (\Phi_2 \setminus \Phi_2(x_2)) \ ,$$

то отсюда следует, что этот граф распадается на $(n_1 + n_2)$ несвязанных графов $G_k^{(1)}$, $k = 1 \div n_1$ и $G_l^{(2)}$, $l = 1 \div n_2$, то есть вершина z является его вершиной сочленения с индексом сочленения $(n_1 + n_2)$. При этом, если в этих рассуждениях $n_1 = 1$ или $n_2 = 1$, то это означает, что соответствующая вершина не является вершиной сочленения в своём графе.

Общий случай утверждения леммы доказывается индукцией по m. При этом индукционный шаг от значения m к значению $(m + 1)$ строится на основе доказанного утверждения при $m = 2$, положив

$$\langle (V_1)_{x_1:=y} \ \cup \ ... \ \cup \ (V_m)_{x_m:=y}, \quad (\Phi_1)_{x_1:=y} \ \cup \ ... \ \cup \ (\Phi_m)_{x_m:=y}\rangle = G^{(1)} \,,$$

$$G_{m+1} = \langle V_{m+1}, \ \Phi_{m+1}\rangle = G^{(2)}$$

и представив

$$\langle G, z\rangle = \mathsf{gl}(G_1, x_1; ...; G_{m+1}, x_{m+1}) = \mathsf{gl}(G^{(1)}, y; G^{(2)}, x_{m+1}) \,. \qquad \blacksquare$$

Следствие. *Если во всех графах G_j, $j = 1 \div m$ в формулировке леммы 5 отмеченные вершины не являются вершинами сочленения, то индекс сочленения отмеченной вершины z в результирующем графе G равен m.*

Определение 4. *Пусть вершина z является вершиной сочленения с индексом $\mathrm{Ind}(z) = n$ в графе $G = \langle V, \Phi\rangle$, и при этом графы $G'_k = \langle V_k, \Phi_k\rangle$, $k = 1 \div n$ являются связанными компонентами графа $\langle V \setminus \{z\}, \Phi \setminus \Phi(z)\rangle$, $\Phi(z) = \{\{z, y_k\}; k = 1 \div n\}$. Для фиксированных непустых множеств Σ_1, ..., Σ_m рёбер таких, что $\Sigma_j \subset \Phi(z)$, $|\Sigma_j| = n_j$, где $n_1, ..., n_m$ – натуральные числа, для которых имеет место $n_1 + ... + n_m = n$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и $\Sigma_k \cap \Sigma_l = \varnothing$*

при $k \neq l$, $\bigcup_{j=1}^{m} \Sigma_j = \Phi(z)$, *операция разрезания графа* G *по вершине* z *на* m *частей сопоставляет ему совокупность* m *субграфов*

$$\left\langle \left(\bigcup_{k:\{y_k,z\}\in\Sigma_j} V_k \right)_{z:=x_j} \cup \{x_j\}, \left[\left(\bigcup_{k:\{y_k,z\}\in\Sigma_j} \Phi_k \right) \cup \Sigma_j \right]_{z:=x_j} \right\rangle \equiv G_j$$

с соответствующими им отмеченными вершинами $x_j, j = 1 \div m$

Заметим, что, согласно данному определению, вершины x_j в графах, полученных в результате применения операции разрезания, являются их вершинами сочленения с индексами сочленения, равными $n_j, j = 1 \div m$, соответственно.

Очевидным образом, граф G с отмеченной вершиной z получается из графов G_j посредством операции склеивания по отмеченным вершинам x_j, $j = 1 \div$,

$$\langle G, z\rangle = \mathsf{gl}(G_1, x_1; ...; G_m, x_m)\,.$$

Из приведенного определения видно, что операция разрезания по вершине сочленения однозначно определена при $\mathrm{Ind}(z) = 2$ (результат её применения не зависит дополнительно от каких-либо множеств Σ_j, $j = 1, 2$).

Введём теперь ещё одну операцию склеивания и соответствующую ей операцию разрезания, которые в дальнейшем (при доказательстве основной теоремы во второй части работы) будут играть центральную роль.

Определение 5. *Пусть* $G_1 = \langle V_1, \Phi_1\rangle$ *и* $G_2 = \langle V_2, \Phi_2\rangle$ *– два несвязанных графа так, что* $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ *и* $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \varnothing$. *Зафиксируем на них несамопересекающиеся пути* γ_1 *и* γ_2 *с фиксированными направлениями,* $\{\gamma_1\} \subset V_1$, $\{\gamma_2\} \subset V_2$ *одинаковой длины* $|\gamma_1| = |\gamma_2| = n$. *Пусть* $\gamma = \langle x_1, ..., x_n\rangle$ *– последовательность, состоящая из попарно несовпадающих вершин, которые не содержатся ни в* V_1, *ни в* V_2. *Операция склеивания графов* G_1 *и* G_2 *по путям* γ_1 *и* γ_2 *сопоставляет им граф*

$$G = \langle (V_1)_{\gamma_1:=\gamma} \cup (V_2)_{\gamma_2:=\gamma}, (\Phi_1)_{\gamma_1:=\gamma} \cup (\Phi_2)_{\gamma_2:=\gamma}\rangle$$

с отмеченным на нём несамопересекащимся путём γ.

Заметим, что в данном определении операция присвоения подразумевает, что вершины одного пути сопоставляются вершинам другого пути в порядке их следования в зафиксированных на них направлениях.

Определение 6. *Пусть множество связности* Φ *графа* $G = \langle V, \Phi\rangle$ *представимо в виде* $\Phi_1 \cup \Phi_2 = \Phi$, $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \Phi_\gamma$, *где* γ *– несамопересекающийся путь на* G *– субграф с множеством связности* Φ_γ. *Определим множества* $V_1 = \{\Phi_1\}$, $V_2 = \{\Phi_2\}$ *так, что* $V = V_1 \cup V_2$ *и* $V_1 \cap V_2 = \{\gamma\}$.

Пусть далее σ_1 *и* σ_2 *– два различных несамопересекающихся пути одинаковой длины, которая совпадает с длиной пути* γ, $|\sigma_1| = |\sigma_2| = |\gamma|$, *множества вершин которых не пересекаются* $\{\sigma_1\} \cap \{\sigma_2\} = \varnothing$ *и* $\{\sigma_i\} \cap V = \varnothing$, $i = 1, 2$. *Операция разрезания графа* G,

сопоставляет ему пару графов $G_1 = \langle (V_1)_{\gamma:=\sigma_1}, (\Phi_1)_{\gamma:=\sigma_1} \rangle$, $G_2 = \langle (V_2)_{\gamma:=\sigma_2}, (\Phi_2)_{\gamma:=\sigma_2} \rangle$ *с отмеченными на них несамопересекающимися путями* σ_1 *и* σ_2. *Согласно этому определению, операция разрезания определена однозначно при фиксированных компонентах разложения* V_1 *и* V_2, Φ_1 *и* Φ_2 *и путях* σ_1 *и* σ_2.

Заметим, что, как и в в случае операций склеивания и разрезания графов по вершинам сочленения, введенные выше операции легко обобщаются на более широкие совокупности графов. Но такого рода операции нам в дальнейшем не понадобятся.

4. Блочная структура связных графов.

Определение 7. *Если граф* G *не содержит в себе субграфов в виде циклов, то такой граф называется деревом или – древесным графом.*

Лемма 6. *Если связный граф* $G = \langle V, \Phi \rangle$ *имеет не менее двух вершин и является конечным деревом, то у него имеется, по крайней мере, две вершины, индекс которых равен единице.*

□ Так как граф G связный, то индекс всех его вершин не равен нулю. Возьмём произвольную вершину $x \in V$. Так как имеется, по крайней мере, ещё одна вершина в V и граф G связный, то найдётся вершина $x_1 \in V$ такая, что $x\varphi x_1$. Далее, если $\mathrm{ind}(x_1) > 1$, то существует вершина $x_2 \in V$ (если $|V| \geqslant 3$), для которой $x_2 \neq x$, из-за отсутствия циклов, и $x_1\varphi x_2$. Затем процесс построения продолжается по индукции, результатом которого является последовательность $\langle x, x_1, x_2, ... \rangle$. На каждом n-м шаге построения, получаем несамопересекающийся путь $\langle x, x_1, x_2, ..., x_n \rangle$, который не является циклом. При этом если $\mathrm{ind}(x_n) > 1$ и $|V| \geqslant n+1$, то существует вершина x_{n+1}, для которой $x_{n+1} \neq x, x_1, ...x_n$, ввиду отсутствия на G циклов, и такая, что $x_n\varphi x_{n+1}$. Так как граф G конечный, то процесс построения последовательности $\langle x, x_1, x_2, ... \rangle$ должен оборваться на какой-то вершине x_k. Это возможно только в том случае, когда $\mathrm{ind}(x_k) = 1$.

Если теперь $\mathrm{ind}(x) = 1$, то нами найдено две вершины с единичным индексом. Если же $\mathrm{ind}(x) > 1$, то для вершины x существует ещё она (помимо x_1) смежная с ней вершина y_1 такая, что $y_1\varphi x$. При этом y_1 не может совпадать ни с одной из вершин $x_1, ...x_k$, ввиду отсутствия на G циклов. Если $\mathrm{ind}(y_1) > 1$, то найдется ещё одна вершина y_2, которая, по той же причине, не совпадает ни с одной из вершин $x, x_1, ...x_k$ и такая, что $y_2\varphi y_1$. Далее, как и выше, по индукции, продолжим процесс построения последовательности $\langle x, y_1, ...y_n \rangle$, для которой y_n не совпадает ни с одной из вершин $y_{n-2}, ..., y_1, x, x_1, ...x_k$, ввиду отсутствия на G циклов. Продолжение этого процесса возможно до тех пор, пока $\mathrm{ind}(y_n) > 1$. Поэтому этот процесс, ввиду конечности графа, оборвётся на какой-то вершине y_l и это возможно только при $\mathrm{ind}(y_l) = 1$. В результате, x_k и y_l – две вершины с единичными индексами. ■

Теорема 1. *Пусть* G_m *– конечный древесный граф с* m *вершинами* $x_1, ..., x_m$ *с* m *вершинами, которые имеют, соответственно, индексы* $n_1, ..., n_m$. *Тогда число рёбер* $l(G)$ *графа* G_m *выражается формулой*

$$l(G_m) = n_1 + ... + n_m - m + 1\,. \tag{4}$$

□ Доказательство строится индукцией по m. При $m = 1$ формула тривиальна, так как $n_1 = 0$ и $l(G_1) = 0$. Допустим, что формула (2) выполняется при фиксированном значении m. Так как на древесном графе всегда имеется концевая вершина, то при значении числа вершин $(m+1)$, выберем произвольную концевую вершину x_{m+1} в качестве $(m+1)$-й. Для неё таким образом, $n_{m+1} = 1$. Отрежем эту вершину от G_{m+1} вместе с ребром, соединяющим её через посредство некоторой вершины x_m сочленения, с остальной частью графа, со связным подграфом G_m. Если вершина x_m в графе G_{m+1} имеет индекс n_m, то в графе G_m её индекс равен $(n_m - 1)$. Тогда, так как в графе G_m формула (2), по предположению, верна и $l(G_m) + 1 = l(G_{m+1})$, то получаем

$$l(G_{m+1}) = l(G_m) + 1 = [n_1 + ... + (n_m - 1) - m + 1] + 1 =$$

$$= n_1 + ... + n_m + n_{m+1} - (m+1) + 1\,,$$

где учтено, что $n_{m+1} = 1$. ■

Вершину x графа G назовём *концевой*, если $\mathrm{ind}(x) = 1$. Очевидно, что, если x – концевая вершина и $x\varphi y$, то y – вершина сочленения графа G.

Следствие. *Формула (4) остаётся верной как при учёте концевых вершин дерева, так и без их учёта, так как для этих вершин индексы сочленения равны 1.*

Теорема 2. *Каждая вершина x древесного графа, индекс которой больше единицы, является вершиной сочленения. При этом*

$$\mathrm{Ind}(x) = \mathrm{ind}(x)\,.$$

□ Пусть $G = \langle V, \Phi\rangle$ – древесный граф и $x \in V$, $\mathrm{ind}(x) > 1$. Удалим из V эту вершину и из Φ всё множество рёбер $\Phi(x)$. В результате, получим граф $G' = \langle V \setminus \{x\}, \Phi \setminus \Phi(x)\rangle$. Для каждой вершины $y \in V$ такой, что $\{y, x\} \in \Phi$ введём множество $V_y \subset V$ тех вершин $z \in V \setminus \{x\}$, через которые проходят пути γ с начальной вершиной y. Ввиду связности G, имеет место разложение

$$V \setminus \{x\} = \bigcup_{y:\{y,x\}\in\Phi} V_y\,. \tag{4}$$

Покажем, что все множества V_y попарно не пересекаются. Допустим противное, что имеется такая пара y_1, y_2 вершин, которые $\{y_1, x\} \in \Phi$, $\{y_2, x\} \in \Phi$ и для неё существует вершина $u \in V_{y_1} \cap V_{y_2}$. Это означает, по построению, что имеются пути $\gamma(y_1, u)$ и $\gamma(y_2, u)$ на графе G'. Но в этом случае путь $\langle x, \gamma(y_1, u), \gamma(u, y_2), x\rangle$ образует цикл, что невозможно по определению вершины сочленения x. Таким образом, (4) представляет собой дизъюнктивное разложение.

Построим теперь графы $G_y = \langle V_y, \Phi_y\rangle$ для всех y таких, что $\{y, x\} \in \Phi$. Здесь каждое множество смежности Φ_y состоит из тех и только из тех пар в Φ, которые входят в состав какого-либо пути γ из G' y с начальной вершиной y. Так как граф G связный, то имеет место разложение

$$\Phi \setminus \Phi(x) = \bigcup_{y:\{y,x\}\in\Phi} \Phi_y\,. \tag{5}$$

Покажем, что все составляющие этого разложения попарно не пересекаются. Пусть имеются две вершины y_1 и y_2 такие, что для них найдётся пара $\{z_1, z_2\}$, для которой, одновременно, имеет место $\{z_1, z_2\} \in \Phi_{y_1}$ и $\{z_1, z_2\} \in \Phi_{y_2}$. Тогда, по построению, $\{z_1, z_2\} \in \Phi_{y_1}$ и, одновременно, $\{z_1, z_2\} \in \Phi_{y_2}$, что невозможно, так как $V_{y_1} \cap V_{y_2} = \varnothing$.

Таким образом, все множества смежности Φ_y при $\{y, x\} \in \Phi$ попарно не пересекаются, и поэтому графы G_y не связаны друг с другом. В противном случае, имелось бы ребро $\{z_1, z_2\}$ с $z_1 \in V_{y_1}$ и $z_2 \in V_{y_2}$, соединяющее графы G_{y_1} и G_{y_2} и, следовательно, нашёлся бы путь $\langle \gamma(y_1, z_1), z_2 \rangle$, соединяющий вершину z_2 с y_1, что противоречит построению V_{y_1} и V_{y_2}.

Так как все графы G_y, $\{y, x\} \in \Phi$ связные, то x – вершина сочленения графа G и её индекс сочленения равен $|\{y : \{y, x\} \in \Phi\}|$. ■

Определим для произвольного связного графа $G = \langle V, \Phi \rangle$ с множеством точек сочленения $\{x_1, ..., x_n\}$ бинарное отношение h. Будем говорить, что вершины x и y из $V \setminus \{x_1, ..., x_n\}$ находятся в отношении h в том и только в том случае, если на G найдётся связывающий их путь $\gamma(x, y)$, который не содержит среди промежуточных вершин точек сочленения графа. Легко видеть, что отношение h симметрично и транзитивно. Поэтому пополнив его так, чтобы оно обладало свойством рефлексивности, получим, что оно является отношением эквивалентности. Тогда множество $V \setminus \{x_1, ..., x_n\}$ распадается на $p \in \mathbb{N}$ непересекающихся классов V'_k, $p = 1 \div p$ h-эквивалентных вершин,

$$\bigcup_{j=1}^{p} V'_k = V \setminus \{x_1, ..., x_n\}\,.$$

Пополним каждый класс V'_k теми и только теми вершинами x_j сочленения, из которых существует путь $\gamma(x_j, x)$, $x \in V'_k$ расположенный, начиная со второй вершины в этом классе V'_k. Обозначим посредством V_k при каждом $k = 1 \div p$ множество, получаемое из V'_k посредством такого дополнения. Далее, обозначим при каждом $k = 1 \div p$ посредством $G_k = \langle V_k, \Phi_k \rangle$ подграф, порождённый множеством V_k. Расширим семейство этих подграфов, добавив к ним подграфы, которые состоят только из одной вершины $z \in V$, которая является вершиной сочленения графа и при этом множество $\Phi(z)$ состоит из вершин, которые являются либо вершинами сочленения, либо концевыми вершинами. В результате, получим семейство подграфов $G_k = \langle V_k, \Phi_k \rangle$, $k = 1 \div q$, $q \geqslant p$. Кроме того, добавим подграфы, порождаемые парами вершин $\{x_i, x_j\}$ такими, что вершины сочленения x_i и x_j находятся в различных множествах V_k, $k = 1 \div q$.

Подграфы, составляющие полученное, таким образом, семейство $\{G_k; k = 1 \div l\}$, $l \geqslant p$, назовём *блоками* графа G. Важность понятия блока графа выявляется следующими утверждениями.

Теорема 3. *Пусть граф G имеет в своём составе блоки G_k, $k = 1 \div l$. При разрезании графа G по любой его вершине сочленения блоки вновь образованных графов совпадают с блоками графа G.*

□ Если пара вершин x и y на графе G принадлежит одному и тому же блоку, то на G существует путь, промежуточные вершины которого не являются вершинами сочленения графа G, который, по этой причине, остаётся без изменения после разрезания

графа. Следовательно, после разрезания графа, обе эти вершины принадлежат одному и тому же блоку одной из частей графа, полученных в результате его разрезания. ■

Теорема 4. *Каждый цикл (несамопересекающийся), расположенный на графе G, должен полностью размещаться в одном из его блоков (если блок содержит не менее трёх вершин).*

□ Допустим противное, что на графе G имеется цикл γ, расположенный, по крайней мере, в двух блоках G_k и $G_{k'}$. Это означает, что имеются две вершины x и y этого цикла, расположенные в двух различных блоках. Тогда на графе G имеются два, непересекающиеся друг с другом пути $\gamma(x,y)$ и $\gamma'(y,x)$. Так как вершины x и y находятся в разных блоках, то каждый из путей имеет в своём составе, по крайней мере, одну вершину сочленения. Разрежем граф по одной из этих вершин сочленения, например входящей в состав пути $\gamma(x,y)$, так, чтобы число получаемых частей было равно её индексу сочленения. Тогда, наверняка, вершины x и y будут находиться в различных несвязанных частях графа, полученных в результате разрезания, но это противоречит тому, что имеется другой путь $\gamma'(x,y)$, соединяющий вершины x и y, который должен быть полностью расположен в одной из полученных связанных частей графа. ■

Определение 8. *Сопоставим каждому блоку G_k графа G вершину y_k, $k = 1 \div l$. Обозначим это множество вершин посредством $\hat{V}$. Определим на множестве $\hat{V}$ отношение смежности $\hat{\Phi}$ положив $\{y_i, y_j\} \in \hat{\Phi}$, если соответствующие вершинам y_i и y_j блоки G_i и G_j имеют одну общую вершину, которая, таким образом, является вершиной сочленения графа G.*

Граф $\hat{G} = \langle \hat{V}, \hat{\Phi} \rangle$ назовём графом блочной структуры исходного графа G.

Важность понятия графа $\hat{G}$, характеризующего блочную структуру графа G, выявляется следующими утверждением.

Теорема 5. *Пусть $\hat{G} = \langle \hat{V}, \hat{\Phi} \rangle$ – граф блочной структуры графа G. Тогда $\hat{G}$ – древесный граф.*

□ Допустим, что на графе $\hat{G}$, который является графом блочной структуры графа G, имеется цикл. Тогда он содержит не менее трёх вершин. Выберем две из них $\hat{x}$ и $\hat{y}$. Следовательно, на графе $\hat{G}$ существуют два непересекающихся пути $\hat{\gamma}(\hat{x},\hat{y})$ и $\hat{\gamma}'(\hat{x},\hat{y})$ и, по крайней мере, в одном из них имеется промежуточная вершина. Выберем вершины $x \in G$ и $y \in G$ в блоках графа, которым соответствуют вершины $\hat{x}$ и $\hat{y}$ на графе $\hat{G}$. Построим на основе путей $\hat{\gamma}(\hat{x},\hat{y})$ и $\hat{\gamma}'(\hat{x},\hat{y})$ на графе $\hat{G}$ пути $\gamma(x,y)$ и $\gamma'(x,y)$ на графе G, проводя их произвольным образом в тех блоках графа G, которые состоят более чем из одной вершины. Тогда пути $\gamma(x,y)$, $\gamma'(x,y)$ также не пересекаются. Так как вершины x и y находятся в разных блоках, то на каждом из путей $\gamma(x,y)$, $\gamma'(x,y)$ имеется, по крайней мере, одна такая вершина сочленения, что при разрезании графа G по ней вершины x и y окажутся в разных возникающих при этом разрезании связных частях. Эти вершины мы обозначим, соответственно, z и z', $z \neq z'$. Но это приводит к противоречию, так как при разрезании по вершине z', лежащей на пути $\gamma(x,y)$, вершины x, y остаются связанными путём $\gamma(x,y)$, который должен полностью попасть в одну и ту же связную часть. Таким образом, сделанное нами предположение о наличии цикла на $\hat{G}$ неверно. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians / H. Kesten. – Boston: Birkhauser, 1982.

2. Virchenko Yu.P., Tolmacheva Yu.A. Method of Sequential Approximative Estimates in Descrete Percolation Theory // Studies in Mathematical Physics Research. ed. Charles V. Benton. / Yu.P. Virchenko. – New York : Nova Science Publishers, Inc., 2004. – P.155-175.

3. Меншиков М.В., Молчанов С.А., Сидоренко А.Ф. Теория перколяции и некоторые приложения // Итоги науки и техники. сер. теор. вер., мат. стат. и теор. кибер./ М.В. Меншиков. – М.: ВИНИТИ. – 1986. – 24. – С.53-110.

4. Александров П.С. Комбинаторная топология / П.С. Александров. – М.-Л.: Наука, 1947.

5. Понтрягин Л.С. Основы комбинаторной топологии. 2-е изд. / Л.С. Понтрягин. – М.: Наука, 1976.

FINITE CLUSTERS IN PLANE MOSAICS
Part I. Cutting and glueing operations

E.S. Antonova, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: antonova_e_s@mail.ru
Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. It is proposed the proof of H.Kesten's theorem that the external border of each finite cluster containing in the infinite plane graph of the mosaic type id the cycle on the graph being conjugate to it. It is done by combinatoric methods without using the K.Jordan theorem ab out continuous simple closed plane curves.

Key words: plane graph, mosaic, cluster, external border, cycle.

УДК 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Г.Р. Юнусова

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Молодогвардейская 194, Самара, 443001, Россия, e-mail: ggg-ggg@mail.ru

Аннотация. Для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области изучена обратная задача по поиску правой части с нелокальным условием, связывающим производные искомого решения, которые принадлежат разным типам рассматриваемого уравнения. Установлен критерий единственности и существование решения задачи методом спектрального анализа. Доказана устойчивость решения по нелокальному граничному условию.

Ключевые слова. Обратная задача, уравнение смешанного типа, метод спектрального анализа, единственность, существование, устойчивость.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение параболо-гиперболического типа

$$Lu = f(x,t)\,, \tag{1}$$

где

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx}, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx}, & t < 0\,, \end{cases} \qquad f(x,t) = \begin{cases} f_1(x), & t > 0\,, \\ f_2(x), & t < 0\,, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\ 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа.

Обратная задача. *Найти в области D функции $u(x,t)$ и $f(x,t)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+)\,; \tag{2}$$

$$f_i(x) \in C(0,1) \cap L[0,1]\,, \quad i = 1,2\,; \tag{3}$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x,t)\,, \qquad (x,t) \in D_+ \cup D_-\,; \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0\,, \quad -\alpha \le t \le \beta\,; \tag{5}$$

$$u_t(x,-\alpha) - u_t(x,\beta) = \psi(x)\,, \quad 0 \le x \le 1\,; \tag{6}$$

$$u(x,-\alpha) = \varphi(x)\,, \quad 0 \le x \le 1\,; \tag{7}$$

$$u(x,\beta) = g(x)\,, \quad 0 \le x \le 1\,, \tag{8}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = g(0) = g(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Прежде всего отметим здесь работы [1]–[10].

В работе [11] предложен новый подход – метод спектральных разложений для обоснования единственности и существования решения прямых задач для уравнений смешанного типа. Таким методом решены обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа с локальными граничными условиями [12], [13].

В данной работе впервые предлагается обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с нелокальным условием (6), связывающим производные искомого решения, которые принадлежат разным типам рассматриваемого уравнения (1). Установлен критерий единственности и существование решения обратной задачи (2) – (8) методом спектрального анализа. Доказана устойчивость решения по граничным условиям.

2. Единственность решения. Пусть $u(x,t)$ и $f(x,t)$ – решение задачи (2) – (8). Рассмотрим функцию

$$u_k(t) = \sqrt{2}\int\limits_0^1 u(x,t)\sin\pi kx dx\,, \quad k = 1, 2, \dots\,. \tag{9}$$

На основании (9) введем функцию

$$u_{k,\varepsilon}(t) = \sqrt{2}\int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x,t)\sin\pi kx dx\,, \quad k = 1, 2, \dots\,, \tag{10}$$

где ε – достаточно малое число. Дифференцируя равенство (10) один раз по t при $t > 0$ и 2 раза при $t < 0$, учитывая уравнение (1), получим

$$u'_{k,\varepsilon}(t) = \sqrt{2}\int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} f_1(x)\sin\pi kx dx + I_1\,, \quad t > 0\,, \tag{11}$$

$$u''_{k,\varepsilon}(t) = \sqrt{2}\int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} f_2(x)\sin\pi kx dx + I_1\,, \quad t < 0\,, \tag{12}$$

где

$$I_1 = \sqrt{2}\int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx}\sin\pi kx dx\,.$$

Проинтегрируем два раза по частям интеграл I_1. Тогда имеем

$$I_1 = \sqrt{2}u_x(x,t)\sin\pi kx|_\varepsilon^{1-\varepsilon} - \sqrt{2}\pi k u(x,t)\cos\pi kx|_\varepsilon^{1-\varepsilon} - (\pi k)^2 u_{k,\varepsilon}(t)\,. \tag{13}$$

Переходя в равенствах (11) – (13) к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом граничных условий (5), получим, что $u_k(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$u_k'(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = f_{1k}\,, \quad t > 0, \tag{14}$$

$$u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = f_{2k}\,, \quad t < 0\,, \quad k \in \mathbb{N}\,, \tag{15}$$

где

$$f_{ik} = \sqrt{2}\int\limits_0^1 f_i(x)\sin\lambda_k x dx\,, \quad \lambda_k = \pi k\,, \quad k \in \mathbb{N},\ i = 1, 2\,. \tag{16}$$

Дифференциальные уравнения (14), (15) имеют общие решения

$$u_k(t) = \begin{cases} C_{1k}e^{-\lambda_k^2 t} + \dfrac{f_{1k}}{\lambda_k^2}\,, & t > 0\,, \\ C_{2k}\cos\lambda_k t + C_{3k}\sin\lambda_k t + \dfrac{f_{2k}}{\lambda_k^2}\,, & t < 0\,, \end{cases} \tag{17}$$

где C_{1k}, C_{2k} и C_{3k} – произвольные постоянные. По условию решение $u(x,t) \in C^1(\overline{D})$, тогда для функции (17) выполнены равенства

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \quad u_k'(0+0) = u_k'(0-0)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,. \tag{18}$$

Отсюда следует, что $C_{2k} = \dfrac{(f_{1k} - f_{2k})}{\lambda_k^2} + C_{1k}$, $C_{3k} = -\lambda_k C_{1k}$. С учетом найденных значений C_{2k} и C_{3k} функции (17) принимают вид

$$u_k(t) = \begin{cases} C_{1k}e^{-\lambda_k^2 t} + \dfrac{f_{1k}}{\lambda_k^2}, & t > 0\,, \\ \left(\frac{(f_{1k}-f_{2k})}{\lambda_k^2} + C_{1k}\right)\cos\lambda_k t - \lambda_k C_{1k}\sin\lambda_k t + \frac{f_{2k}}{\lambda_k^2}, & t < 0\,. \end{cases} \tag{19}$$

Теперь для нахождения коэффициентов C_{1k}, f_{1k} и f_{2k} воспользуемся граничными условиями (6) – (8) и формулой (9)

$$u_k'(-\alpha) - u_k'(\beta) = \sqrt{2}\int\limits_0^1 [u_t(x,-\alpha) - u_t(x,\beta)]\sin\pi k x dx = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \psi(x)\sin\pi k x dx = \psi_k\,, \tag{20}$$

$$u_k(-\alpha) = \sqrt{2}\int\limits_0^1 u(x,-\alpha)\sin\pi k x dx = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \varphi(x)\sin\pi k x dx = \varphi_k\,, \tag{21}$$

$$u_k(\beta) = \sqrt{2}\int\limits_0^1 u(x,\beta)\sin\pi k x dx = \sqrt{2}\int\limits_0^1 g(x)\sin\pi k x dx = g_k\,. \tag{22}$$

Удовлетворяя функции (19) условиям (20) – (22), относительно неизвестных C_{1k}, f_{1k} и f_{2k} получим систему

$$\begin{cases} f_{1k}\sin\lambda_k\alpha - f_{2k}\sin\lambda_k\alpha + C_{1k}\lambda_k^2(\sin\lambda_k\alpha - \lambda_k\cos\lambda_k\alpha + \lambda_k e^{-\lambda_k^2\beta}) = \lambda_k\psi_k\,, \\ f_{1k}\cos\lambda_k\alpha + f_{2k}(1-\cos\lambda_k\alpha) + C_{1k}\lambda_k^2(\cos\lambda_k\alpha + \lambda_k\sin\lambda_k\alpha) = \lambda_k^2\varphi_k\,, \\ f_{1k} + C_{1k}\lambda_k^2 e^{-\lambda_k^2\beta} = \lambda_k^2 g_k\,. \end{cases} \tag{23}$$

Из системы (23) при условии

$$\Delta(k) = \lambda_k(1-\cos\lambda_k\alpha)(1+e^{-\lambda_k^2\beta}) + \sin\lambda_k\alpha(1-e^{-\lambda_k^2\beta}) \neq 0\,, \quad k\in\mathbb{N}\,, \tag{24}$$

единственным образом находим

$$C_{1k} = \frac{\psi_k(1-\cos\lambda_k\alpha) + \lambda_k(\varphi_k - g_k)\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k\Delta(k)}\,, \tag{25}$$

$$f_{1k} = \lambda_k^2\left[g_k - \frac{\psi_k(1-\cos\lambda_k\alpha) + \lambda_k(\varphi_k - g_k)\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k\Delta(k)}e^{-\lambda_k^2\beta}\right]\,, \tag{26}$$

$$f_{2k} = \lambda_k^2\left[\varphi_k - \frac{\psi_k\left[\lambda_k\sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha(1-e^{-\lambda_k^2\beta})\right] + \lambda_k^2(\varphi_k - g_k)(1-\cos\lambda_k\alpha\; e^{-\lambda_k^2\beta})}{\lambda_k\Delta(k)}\right]\,. \tag{27}$$

Таким образом найден окончательный вид функций $u_k(t)$, которые определяются по формуле (19), а коэффициенты C_{1k}, f_{1k} и f_{2k} находятся из формул (25) – (27).

Пусть теперь $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$ на $[0,1]$ и выполнены условия (24) при всех $k\in\mathbb{N}$. Тогда $\varphi_k = \psi_k = g_k \equiv 0$ и из (19), (25) – (27) следует, что $u_k(t)\equiv 0$ на сегменте $[-\alpha,\beta]$ и $f_{ik} = 0$, $i = 1,2$, при всех $k\in\mathbb{N}$. Отсюда, в силу (9) и (16), имеем

$$\int\limits_0^1 u(x,t)\sin\pi kx dx = 0\,, \qquad \int\limits_0^1 f_i(x)\sin\pi kx dx = 0\,, \qquad i = 1,2\,, \qquad k\in\mathbb{N}\,.$$

В силу полноты системы синусов $\{\sin\pi kx\}$ в пространстве $L_2[0,1]$, из последних равенств следует, что $u(x,t) = 0$ и $f_i(x) = 0$ почти всюду на $[0,1]$ при любом $t\in[-\alpha,\beta]$. Поскольку, в силу (2) и (3), функции $u(x,t)$ и $f_i(x)$ непрерывны соответственно на $\overline{D}$ и $(0,1)$, то $u(x,t)\equiv 0$ в $\overline{D}$ и $f_i(x)\equiv 0$ на $(0,1)$.

Предположим, что условие (24) нарушено при $k = p$ и некоторых α и β, т.е.

$$\Delta(p) = \lambda_p(1-\cos\lambda_p\alpha)(1+e^{-\lambda_p^2\beta}) + \sin\lambda_p\alpha(1-e^{-\lambda_p^2\beta}) = 0\,.$$

Тогда однородная задача (2) – (8) (где $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u_p(x,t) = \begin{cases} (e^{-\lambda_p^2 t} - e^{-\lambda_p^2 \beta}) \sin \pi p x\,, & t > 0\,, \\ \left[\dfrac{\lambda_p(\cos \lambda_p \alpha - e^{-\lambda_p^2 \beta})}{\sin \lambda_p \alpha} (\cos \lambda_p t - 1) - \lambda_p \sin \lambda_p t - e^{-\lambda_p^2 \beta} + 1 \right] \sin \pi p x\,, & t < 0\,, \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} &f_{1p}(x) = f_{1p} \sin \pi p x\,, \quad f_{1p} = -\lambda_p^2 e^{-\lambda_p^2 \beta}\,, \\ &f_{2p}(x) = f_{2p} \sin \pi p x\,, \quad f_{2p} = \lambda_p^2 \left(\frac{\lambda_p(e^{-\lambda_p^2 \beta} - \cos \lambda_p \alpha)}{\sin \lambda_p \alpha} - e^{-\lambda_p^2 \beta} + 1 \right)\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности.

Теорема 1. *Если существует решение $u(x,t)$ и $f(x,t)$ задачи* (2) – (8), *то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены условия* (24).

Естественно возникает вопрос об обращении в нуль выражения $\Delta(k)$. Для этого представим $\Delta(k)$ в следующем виде:

$$\Delta(k) = 2\sqrt{\lambda_k^2(1 + e^{-\lambda_k^2 \beta})^2 + (1 - e^{-\lambda_k^2 \beta})^2}\ \sin\left(\frac{\lambda_k \alpha}{2} + \gamma_k\right) \sin \frac{\lambda_k \alpha}{2}\,, \tag{30}$$

где

$$\gamma_k = \arcsin \frac{1 - e^{-\lambda_k^2 \beta}}{\sqrt{\lambda_k^2(1 + e^{-\lambda_k^2 \beta})^2 + (1 - e^{-\lambda_k^2 \beta})^2}}\,.$$

Из представления (30) видно, что выражение $\Delta(k) = 0$ только тогда, когда

$$\alpha = \frac{2\pi n}{\lambda_k},\ n \in \mathbb{N}, \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{2\pi m}{\lambda_k} - \frac{2\gamma_k}{\lambda_k},\ m \in \mathbb{N}\,.$$

3. Обоснование существования решения. Поскольку α и β – любые числа, то при достаточно больших k выражение $\Delta(k)$ может стать достаточно малым, то есть возникает проблема "малых знаменателей". Чтобы не было такой ситуации, надо показать существование чисел α и β, что при достаточно больших k выражение $\Delta(k)$ отделено от нуля.

Лемма 1. *Если $\alpha \in M$, где $M = \{\alpha \mid \alpha = \sqrt{d} + p,\ p \in \mathbb{Z},\ \sqrt{d} > -p,\ d = 2,3,5,6,7,8\}$, то существует постоянная C_α, зависящая от α такая, что при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$|\Delta(k)| > \frac{C_\alpha}{k}\,. \tag{31}$$

□ Следуя [13], выражение (30) представим в виде

$$\Delta(k) = A_k(\beta)\Delta_1(k)\Delta_2(k)\,, \tag{32}$$

где $A_k(\beta) = 2\sqrt{\pi^2k^2(1+e^{-\pi^2k^2\beta})^2 + (1-e^{-\pi^2k^2\beta})^2}\,,\quad \Delta_1(k) = \sin\pi k\alpha_1\,,$
$\Delta_2(k) = \sin(\pi k\alpha_1 + \gamma_k)\,,\quad \alpha_1 = \alpha/2\,.$

Преобразуем выражение $\Delta_1(k)$ следующим образом:

$$\big|\Delta_1(k)\big| = \Big|\sin(\pi k\alpha_1 - \pi m)\Big| = \Big|\sin\pi k\left(\alpha_1 - \frac{m}{k}\right)\Big|,\quad m\in\mathbb{N}\,.$$

Для всякого $k\in\mathbb{N}$ можно подобрать $m\in\mathbb{N}$ такое, что имеет место неравенство

$$\left|\alpha_1 - \frac{m}{k}\right| < \frac{1}{2k}\,. \tag{33}$$

Действительно, достаточно положить

$$m = \begin{cases} [\alpha_1 k]\,, & \text{если}\{\alpha_1 k\} < 1/2\,,\\ \alpha_1 k + 1\,, & \text{если}\{\alpha_1 k\} > 1/2\,,\end{cases}$$

где $[\alpha_1 k]$ и $\{\alpha_1 k\}$ – целая и дробная части соответственно иррационального числа $\alpha_1 k$.

Пусть $m\in\mathbb{N}$ такое, что выполнено неравенство (33) или равносильное ему

$$\left|\pi k\left(\alpha_1 - \frac{m}{k}\right)\right| < \frac{\pi}{2}\,. \tag{34}$$

Тогда с учетом неравенства

$$\sin x > \frac{2x}{\pi}\,,\qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, \tag{35}$$

и теоремы Лиувилля ([14], с.59) будем иметь

$$\big|\Delta_1(k)\big| = \sin\left|\pi k\left(\alpha_1 - \frac{m}{k}\right)\right| > \frac{2}{\pi}\pi k\left|\alpha_1 - \frac{m}{k}\right| = 2k\left|\alpha_1 - \frac{m}{k}\right| > 2k\frac{C_1}{k^2} = \frac{C_1}{k}\,, \tag{36}$$

где C_1 – положительное число.

Преобразуем выражение $\Delta_2(k)$ к виду:

$$\big|\Delta_2(k)\big| = \Big|\sin(\pi k\alpha_1 - \pi m + \gamma_k)\Big| = \Big|\sin\pi k\left(\alpha_1 - \frac{m}{k} + \frac{\gamma_k}{\pi k}\right)\Big|\,.$$

Пусть $m\in\mathbb{N}$ такое, что выполнено условие (34). В силу неравенства

$$0 < \arcsin x < \frac{\pi}{2}x\,,\qquad 0 < x < 1\,, \tag{37}$$

справедлива следующая оценка:

$$0 < \frac{\gamma_k}{\pi k} = \frac{1}{\pi k} \arcsin \frac{1 - e^{-\pi^2 k^2 \beta}}{\sqrt{\pi^2 k^2 (1 + e^{-\pi^2 k^2 \beta})^2 + (1 - e^{-\pi^2 k^2 \beta})^2}} \leq \frac{1}{\pi k} \arcsin \frac{1}{\pi k} < \frac{1}{2\pi k^2} \ . \quad (38)$$

Из (34) и (38) получим два возможных случая:

$$1) \ \ \frac{\pi}{2} \leq \pi k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} + \frac{\gamma_k}{\pi k} \right| \leq \pi k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} \right| + \pi k \left| \frac{\gamma_k}{\pi k} \right| <$$

$$< \pi k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} \right| + \frac{\pi}{6k} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6k} < \frac{3\pi}{4} \, ,$$

$$2) \ \ 0 < \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} + \frac{\gamma_k}{\pi k} \right| < \frac{\pi}{2} \, .$$

В первом случае будем иметь

$$\left| \Delta_2(k) \right| \geq \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \geq \frac{C_2}{k} \ . \quad (39)$$

Во втором случае с учетом неравенства (35), получим

$$\left| \Delta_2(k) \right| > \frac{2}{\pi} \pi k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} + \frac{\gamma_k}{\pi k} \right| = 2k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} + \frac{\gamma_k}{\pi k} \right| \geq 2k \left| \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} \right| - \frac{\gamma_k}{\pi k} \right| \ . \quad (40)$$

В дальнейшем предположим, что α является квадратическим иррациональным числом, т. е. является корнем только многочлена второй степени

$$f(x) = x^2 - d = (x - \alpha_1)(x + \alpha_1) \, , \quad (41)$$

$d > 0$, $\alpha_1 = \sqrt{d} \notin \mathbb{N}$. Из представления (41) при $x = m/k$, где $m, k \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{m}{k} - \alpha_1 \right| = \frac{|f(\frac{m}{k})|}{\frac{m}{k} + \alpha_1} \geq \frac{1}{k^2(\frac{m}{k} + \alpha_1)} > \frac{1}{k^2(2\alpha_1 + \frac{1}{2})} = \frac{\delta}{k^2} \, , \quad (42)$$

так как

$$\frac{m}{k} + \alpha_1 \leq \left| \frac{m}{k} - \alpha_1 \right| + 2\alpha_1 < \frac{1}{2k} + 2\alpha_1 \leq \frac{1}{2} + 2\alpha_1 \, ,$$

$$\left| f\left(\frac{m}{k}\right) \right| = \frac{|m^2 - dk^2|}{k^2} \geq \frac{1}{k^2} \ .$$

Теперь потребуем выполнение условия

$$\delta = \frac{1}{2\alpha_1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{4\sqrt{d} + 1} > \frac{1}{2\pi} \ . \quad (43)$$

Неравенство (43) имеет место, когда d принимает значения: 2, 3, 5, 6, 7, 8.

Таким образом, построено множество $\{\alpha_1,\ \alpha_1=\sqrt{d},\ d=2,3,5,6,7,8\}$ чисел α_1, для которых с учетом (40), (38), (42), (43),

$$\big|\Delta_2(k)\big| > 2k\left|\left|\alpha_1-\frac{m}{k}\right|-\frac{\gamma_k}{\pi k}\right| > \frac{2\delta-1/\pi}{k}=\frac{C_2}{k}\ .$$

Откуда, учитывая выражение (32) получим справедливость леммы. ■

Теперь при определенных условиях на функции $\psi(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$ и число α покажем, что функции

$$u(x,t)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)\sin\pi kx\,, \tag{44}$$

$$f_i(x)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}f_{ik}\sin\pi kx\,,\quad i=1,2 \tag{45}$$

удовлетворяют условиям (2) и (3), где $u_k(t)$ и f_{ik} – определяются формулами (19), (25) – (27).

Лемма 2. *Пусть выполнено условие (31). Тогда при больших k справедливы оценки*

$$|f_{1k}|\le M_1\Big[|\psi_k|+|\varphi_k|+k^2|g_k|\Big]\,, \tag{46}$$

$$|f_{2k}|\le M_2k^3\Big[|\psi_k|+k\Big(|\varphi_k|+|g_k|\Big)\Big]\,, \tag{47}$$

$$|u_k(t)|\le\begin{cases} M_3\Big[|\psi_k|+k\Big(|\varphi_k|+|g_k|\Big)\Big]\,, & t\ge 0\,,\\ M_5k\Big[|\psi_k|+k\Big(|\varphi_k|+|g_k|\Big)\Big]\,, & t\le 0\,,\end{cases} \tag{48}$$

$$|u_k'(t)|\le\begin{cases} M_4k^2\Big[|\psi_k|+k\Big(|\varphi_k|+|g_k|\Big)\Big]\,, & t\ge 0\,,\\ M_5k^2\Big[|\psi_k|+k\Big(|\varphi_k|+|g_k|\Big)\Big]\,, & t\le 0\,,\end{cases} \tag{49}$$

$$|u_k''(t)|\le M_5k^3\Big[|\psi_k|+k\Big(|\varphi_k|+|g_k|\Big)\Big],\quad t<0\,, \tag{50}$$

где M_i – здесь и далее положительные постоянные.

□ Учитывая оценку (31) из (25) будем иметь

$$|C_{1k}|=\left|\frac{\psi_k(1-\cos\lambda_k\alpha)+\lambda_k(\varphi_k-g_k)\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k\Delta(k)}\right|\le$$

$$\le M_0\big[|\psi_k|+k(|\varphi_k|+|g_k|)\big]\,. \tag{51}$$

Исходя из оценок (51), (31) и равенств (26), (27) получим

$$|f_{1k}| \;\le\; \lambda_k^2|g_k| + \lambda_k^2 e^{-\lambda_k^2\beta}|\psi_k| + \lambda_k^3 e^{-\lambda_k^2\beta}(|\varphi_k| + |g_k|) \;\le\; M_1\big[|\psi_k| + |\varphi_k| + k^2|g_k|\big]\,, \tag{52}$$

$$|f_{2k}| \;\le\; \lambda_k^2[|\varphi_k| + (\lambda_k+1)|\psi_k| + \lambda_k^2(|\varphi_k| + |g_k|)] \;\le\; M_2k^3\big[|\psi_k| + k(|\varphi_k| + |g_k|)\big]\,. \tag{53}$$

На основании формулы (19) и оценок (51) – (53) при любых $k \in \mathbb{N}$ и $t \in [0,\beta]$ имеем

$$|u_k(t)| \le |C_{1k}| + \frac{1}{\lambda_k^2}|f_{1k}| \le$$

$$\le M_0\big[|\psi_k| + k(|\varphi_k| + |g_k|)\big] + \frac{1}{k^2}M_1\big[|\psi_k| + |\varphi_k| + k^2|g_k|\big] \le$$

$$\le M_3\Big[|\psi_k| + k\Big(|\varphi_k| + |g_k|\Big)\Big]\,,$$

$$|u_k'(t)| = |\lambda_k^2 C_{1k} e^{-\lambda_k^2 t}| \le M_4k^2\Big[|\psi_k| + k\Big(|\varphi_k| + |g_k|\Big)\Big]\,.$$

Аналогично при $t \in [-\alpha, 0]$ получим

$$|u_k(t)| \le \frac{1}{\lambda_k^2}\Big(|f_{1k}| + |f_{2k}|\Big) + |C_{1k}| + |\lambda_k C_{1k}| \le M_5k\Big[|\psi_k| + k\Big(|\varphi_k| + |g_k|\Big)\Big]\,,$$

$$|u_k'(t)| = \left|\lambda_k\Big(\frac{(f_{1k} - f_{2k})}{\lambda_k^2} + C_{1k}\Big)\sin\lambda_k t + \lambda_k^2 C_{1k}\cos\lambda_k t\right| \le$$

$$\le M_5k^2\Big[|\psi_k| + k\Big(|\varphi_k| + |g_k|\Big)\Big]\,,$$

$$|u_k''(t)| = \left|\lambda_k\Big(\frac{(f_{1k} - f_{2k})}{\lambda_k^2} + C_{1k}\Big)\sin\lambda_k t + \lambda_k^2 C_{1k}\cos\lambda_k t\right| \le$$

$$\le M_5k^3\Big[|\psi_k| + k\Big(|\varphi_k| + |g_k|\Big)\Big]\,. \quad \blacksquare$$

Формально из (44) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_t(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k'(t)\sin\pi kx\,, \tag{54}$$

$$u_x(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \pi k\; u_k(t)\cos\pi kx\,, \tag{55}$$

$$u_{tt}(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k''(t)\sin\pi kx,\;\; t<0\,, \tag{56}$$

$$u_{xx}(x,t) = -\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(\pi k)^2 u_k(t)\sin\pi kx\,. \tag{57}$$

Ряды (44), (45), (54) – (57) в силу лемм 1 и 2 мажорируются рядом

$$M_6 \sum_{k=1}^{+\infty} k^3 \Big[|\psi_k| + k\Big(|\varphi_k| + |g_k| \Big) \Big] . \tag{58}$$

Для сходимости ряда (58) достаточно, чтобы $\psi(x) \in C^4[0,1]$, $\varphi(x), g(x) \in C^5[0,1]$, $\psi^{(j)}(0) = \psi^{(j)}(1) = 0$, $j = 0, 2$; $\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(1) = g^{(i)}(0) = g^{(i)}(1) = 0$, $i = 0, 2, 4$.

Тогда ряд (58) оценивается рядом

$$M_6 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \Big(|\psi_k^{(4)}| + |\varphi_k^{(5)}| + |g_k^{(5)}| \Big) , \tag{59}$$

где

$$\psi_k = \frac{1}{\pi^4} \frac{\psi_k^{(4)}}{k^4} , \quad \psi_k^{(4)} = \sqrt{2} \int_0^1 \psi^{(4)}(x) \sin \pi k x \, dx , \tag{60}$$

$$\varphi_k = \frac{1}{\pi^5} \frac{\varphi_k^{(5)}}{k^5} , \quad \varphi_k^{(5)} = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi^{(5)}(x) \cos \pi k x \, dx , \tag{61}$$

$$g_k = \frac{1}{\pi^5} \frac{g_k^{(5)}}{k^5} , \quad g_k^{(5)} = \sqrt{2} \int_0^1 g^{(5)}(x) \cos \pi k x \, dx , \tag{62}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\psi_k^{(4)}|^2 \le ||\psi^{(4)}||_{L_2}^2 , \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k^{(5)}|^2 \le ||\varphi^{(5)}||_{L_2}^2 , \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} |g_k^{(5)}|^2 \le ||g^{(5)}||_{L_2}^2 .$$

Тогда в силу сходимости ряда (59) на основании признака Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно на замкнутой области $\overline{D}$ ряды (44), (54), (55), а ряды (56) и (57) в соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$. Аналогично функция $f_i(x)$, определенная рядом (45), непрерывна на сегменте $[0,1]$. Непосредственной подстановкой (44) и (45) в уравнение (1) убеждаемся в том, что функции $u(x,t)$ и $f_i(x)$, определенные рядами (44) и (45), удовлетворяют условию (4).

Следовательно, нами доказана

Теорема 2. *Пусть функции $\psi(x) \in C^4[0,1]$, $\varphi(x), g(x) \in C^5[0,1]$, $\psi^{(j)}(0) = \psi^{(j)}(1) = 0$, $j = 0, 2$, $\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(1) = g^{(i)}(0) = g^{(i)}(1) = 0$, $i = 0, 2, 4$ и выполнена оценка (31). Тогда существует единственное решение задачи (2) – (8) и оно определяется рядами (44) и (45).*

4. Устойчивость решения. Введем следующие нормы:

$$||u(x,t)||_{L_2(0,1)} = ||u(x,t)||_{L_2} = \Big(\int_0^1 |u(x,t)|^2 \, dx \Big)^{1/2},$$

$$||u(x,t)||_{C(\overline{D})} = \max_{\overline{D}} |u(x,t)| \ ,$$

$$||f_i(x)||_{W_2^n} = \Big(\int\limits_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n} |f_i^{(k)}(x)|^2 \Big) dx \Big)^{1/2}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,, \quad i = 1,2\,.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения задачи (2) – (8) имеют место оценки:*

$$||u(x,t)||_{L_2} \le M_7 \big(||\psi||_{W_2^0} + ||\varphi||_{W_2^1} + ||g||_{W_2^1} \big)\,, \ \ t \ge 0\,, \tag{63}$$

$$||u(x,t)||_{L_2} \le M_8 \big(||\psi||_{W_2^1} + ||\varphi||_{W_2^2} + ||g||_{W_2^2} \big)\,, \ \ t \le 0\,, \tag{64}$$

$$||f_1(x)||_{L_2} \le M_9 \big(||\psi||_{W_2^0} + ||\varphi||_{W_2^0} + ||g||_{W_2^2} \big)\,, \tag{65}$$

$$||f_2(x)||_{L_2} \le M_{10} \big(||\psi||_{W_2^3} + ||\varphi||_{W_2^4} + ||g||_{W_2^4} \big)\,, \tag{66}$$

$$||u(x,t)||_{C(\overline{D}_+)} \le M_{11} \big(||\psi||_{W_2^0} + ||\varphi||_{W_2^2} + ||g||_{W_2^2} \big)\,, \ \ t \ge 0, \tag{67}$$

$$||u(x,t)||_{C(\overline{D}_-)} \le M_{12} \big(||\psi||_{W_2^2} + ||\varphi||_{W_2^3} + ||g||_{W_2^3} \big)\,, \ \ t \le 0\,, \tag{68}$$

$$||f_1(x)||_{C[0,1]} \le M_{13} \big(||\psi||_{W_2^1} + ||\varphi||_{W_2^1} + ||g||_{W_2^3} \big)\,, \tag{69}$$

$$||f_2(x)||_{C[0,1]} \le M_{14} \big(||\psi||_{W_2^4} + ||\varphi||_{W_2^5} + ||g||_{W_2^5} \big)\,, \tag{70}$$

где постоянные M_i не зависят от функций $\psi(x)$, $\varphi(x)$ и $g(x)$.

□ Поскольку система $\{\sqrt{2}\sin \pi k x\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормирована в $L_2[0,1]$, то из равенств (44), (19) и леммы 2 при $t \ge 0$ имеем

$$||u(x,t)||_{L_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(t) \le M_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \big[|\psi_k| + k(|\varphi_k| + |g_k|) \big]^2 \le$$

$$\le 3M_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \big[|\psi_k|^2 + (k\varphi_k)^2 + (kg_k)^2 \big]\,. \tag{71}$$

Учитывая представления $\varphi_k = \frac{\varphi_k^{(1)}}{\pi k}$, $\varphi_k^{(1)} = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \varphi'(x)\cos \pi k x dx$, $g_k = g_k^{(1)}/\pi k$, $g_k^{(1)} = \sqrt{2}\int\limits_0^1 g'(x)\cos \pi k x dx$, из неравенства (71) получим

$$||u(x,t)||_{L_2}^2 \le 3\widetilde{M}_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} \big[|\psi_k|^2 + |\varphi_k^{(1)}|^2 + |g_k^{(1)}|^2 \big] \le$$

$$\le 3\widetilde{M}_3^2 \big(||\psi||_{L_2}^2 + ||\varphi'||_{L_2}^2 + ||g'||_{L_2}^2 \big) \le M_7^2 \big(||\psi||_{W_2^0}^2 + ||\varphi||_{W_2^1}^2 + ||g||_{W_2^1}^2 \big),$$

где $\widetilde{M}_i$ – здесь и далее положительные постоянные. Отсюда следует справедливость оценки (63). Аналогично исходя из (44) и (19) на основании леммы 2 при $t \leq 0$ будем иметь

$$||u(x,t)||^2_{L_2} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(t) \leq M_5^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[k|\psi_k| + k^2(|\varphi_k| + |g_k|)\right]^2 \leq$$

$$\leq 3M_5^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k\psi_k)^2 + (k^2\varphi_k)^2 + (k^2 g_k)^2\right] \leq 3\widetilde{M}_5^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[|\psi_k^{(1)}|^2 + |\varphi_k^{(2)}|^2 + |g_k^{(2)}|^2\right] \leq$$

$$\leq 3\widetilde{M}_5^2 \big(||\psi'||^2_{L_2} + ||\varphi''||^2_{L_2} + ||g''||^2_{L_2}\big) \leq M_8^2 \big(||\psi||^2_{W_2^1} + ||\varphi||^2_{W_2^2} + ||g||^2_{W_2^2}\big), \qquad (72)$$

где $\psi_k^{(1)} = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \psi'(x)\cos\pi kx dx$, $\varphi_k^{(2)} = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \varphi''(x)\sin\pi kx dx$, $g_k^{(2)} = \sqrt{2}\int\limits_0^1 g''(x)\sin\pi kx dx$. Из неравенства (72) вытекает оценка (64).

На основании соотношений (45), (46) получим

$$||f_1(x)||^2_{L_2} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{1k}^2 \leq M_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[|\psi_k| + |\varphi_k| + k^2|g_k|\right]^2 \leq$$

$$\leq 3M_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[|\psi_k|^2 + |\varphi_k|^2 + (k^2 g_k)^2\right] \leq 3\widetilde{M}_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[|\psi_k|^2 + |\varphi_k|^2 + |g_k^{(2)}|^2\right] \leq$$

$$\leq 3\widetilde{M}_1^2 \big(||\psi||^2_{L_2} + ||\varphi||^2_{L_2} + ||g''||^2_{L_2}\big) \leq M_9^2 \big(||\psi||^2_{W_2^0} + ||\varphi||^2_{W_2^0} + ||g||^2_{W_2^2}\big).$$

Откуда следует оценка (65). Справедливость оценки (66) устанавливается аналогично.

Пусть (x,t) – произвольная точка из $\overline{D}_+$. Тогда используя формулу (44) на основании леммы 2 и неравенства Коши-Буняковского, будем иметь

$$|u(x,t)| \leq \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(t)| \leq \sqrt{2}M_3 \sum_{k=1}^{\infty} \left[|\psi_k| + k(|\varphi_k| + |g_k|)\right] \leq$$

$$\leq \sqrt{2}M_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left[|\psi_k| + |\varphi_k^{(2)}| + |g_k^{(2)}|)\right] \leq$$

$$\leq \sqrt{2}M_3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(2)}|^2\right)^{1/2}\right] +$$

$$+\sqrt{2}M_3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |g_k^{(2)}|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{\pi\sqrt{2}M_3}{\sqrt{6}} \big(||\psi||_{L_2} + ||\varphi''||_{L_2} + ||g''||_{L_2}\big) \leq M_{11}\big(||\psi||_{W_2^0} + ||\varphi||_{W_2^2} + ||g||_{W_2^2}\big),$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$, из которого получаем оценку (67). Аналогично доказывается справедливость оценки (68).

Пользуясь формулой (45), леммой 2 и равенствами (60) – (62), будем иметь

$$|f_2(x)| \le \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}|f_{1k}| \le \sqrt{2}M_2\sum_{k=1}^{\infty}\left[k^3|\psi_k| + k^4(|\varphi_k| + |g_k|)\right] \le$$

$$\le \sqrt{2}M_2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[|\psi_k^{(4)}| + |\varphi_k^{(5)}| + |g_k^{(5)}|)\right] \le$$

$$\le \sqrt{2}M_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k^{(4)}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k^{(5)}|^2\right)^{1/2}\right] +$$

$$+\sqrt{2}M_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|g_k^{(5)}|^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{\pi\sqrt{2}M_2}{\sqrt{6}}\left(||\psi^{(IV)}||_{L_2} + ||\varphi^{(V)}||_{L_2} + ||g^{(V)}||_{L_2}\right) \le M_{14}\left(||\psi||_{W_2^4} + ||\varphi||_{W_2^5} + ||g||_{W_2^5}\right).$$

Таким образом, из последнего неравенства вытекает оценка (70). Справедливость оценки (69) доказывается аналогично.

Литература

1. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР. – 1943. – 39;5. – С.195-198.

2. Лаврентьев М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // ДАН СССР. – 1964. – 157;3. – С.520-521.

3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Т. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев. – М.:Наука,1980. – 286 с.

4. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов. – М.:Наука, 1978. – 206 с.

5. Прилепко А.И., Костин А.Б. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Матем. сборник. – 1992. – 183;4. – С.49-68.

6. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач / А.М. Денисов. – М.:МГУ, 1994. – 207 с.

7. Денисов А.М. Обратная задача для квазилинейного волнового уравнения // Дифференц. уравнения. – 2007. – 43;8. – С.1097-1105.

8. Денисов А.М. Обратные задачи для квазилинейного гиперболического уравнения в случае движущейся точки наблюдения // Дифференц. уравнения. – 2009. – 45;11. – С.1543-1553.

9. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Вычислительная математика и математическая физика. – 2004. – 44;4. – С.694-716.

10. Кожанов А.И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом поглощения // ДАН. – 2006. – 409;6. – С.740-743.

11. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. – 2007. – 413;1. – С.23-26.

12. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. – 2009. – 4. – С.55-62.

13. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Матем. заметки. – 2010. – 87;6. – С.55-62.

14. Хинчин А.Я. Цепные дроби / А.Я. Хинчин. – М.:Наука, 1978. – 112 с.

THE INVERSE PROBLEM FOR THE EQUATION OF MIXED TYPE WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITION

G.R. Yunusova

Samara State Architecturally-Building University,
Molodogvardeyskaya st., 194, Samara, 443001, Russia, e-mail: ggg-ggg@mail.ru

Abstract. The inverse problem in the rectangular domain for the equation of parabolic-hyperbolic type with nonlocal condition is studied. The consists of searching of the right-hand side of equation such that relates the derivatives of the desired solution which belong to different types of equations. The criterion of uniqueness and existence of the solution is established by the spectral analysis method. Solution stability on nonlocal condition is proved.

Keywords: inverse problem, spectral analysis, uniqueness, existence, stability.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 539.2

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ШУМ ТИПА 1/f В СМЕСЕВОМ МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ КОМПОЗИТЕ (x)PZT – (1-x)MZF

С.А. Гриднев, А.В. Калгин

Воронежский государственный технический университет,
Московский пр-т, 14, Воронеж, 394026, Россия, e-mail: s_gridnev@mail.ru
Воронежский государственный технический университет,
Московский пр-т, 14, Воронеж, 394026, Россия, e-mail: kalgin_alexandr@mail.ru

Аннотация. Методом диэлектрической спектроскопии изучен поляризационный шум типа *1/f* в смесевом магнитоэлектрическом композите (x)$PbZr_{0,53}Ti_{0,47}O_3$ – (1-x)$Mn_{0,4}Zn_{0,6}Fe_2O_4$ [(x)PZT – (1-x)MZF] с x = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 0,9 и 1 на частотах от 200 Гц до 50 кГц в интервале температур от комнатной до 770 К. Установлено, что шум *1/f* в композите (x)PZT – (1-x)MZF вызывается флуктуациями поляризации, а его спектральная плотность зависит от состава композита и температуры.

Ключевые слова: магнитоэлектрический композит, диэлектрическая проницаемость, спектральная плотность шума, флуктуации поляризации, фазовый переход, границы полярных областей, доменные границы.

Введение. К настоящему времени измерения шума со спектром типа *1/f* проведены на множестве материалах, например, на стеклах [1], релаксорах PMN-PZT [2,3] и PLZT [4], полупроводнике NdFeBC [5], металлах [6] и др.

Существуют различные предположения о том, что вызывает шум *1/f*. Однако в единственном общем подходе к объяснению шума *1/f*, против которого нет прямых возражений, предполагается, что в материалах, обнаруживающих этот шум, происходят разнообразные релаксационные процессы с широким спектром времен релаксации τ, охватывающим много порядков изменения τ [7]. Эти процессы связаны, например, с кинетикой дефектов, т.е. с неупорядоченностью твёрдых тел. На связь шума *1/f* с дефектами твёрдых тел указывает тот факт, что образцы, изготовленные по одной и той же технологии и имеющие близкие электрофизические параметры, часто обнаруживают разный по величине шум *1/f*: спектральные плотности могут отличаться на порядок и более.

Известно [6], что в общем случае процессы диссипации и релаксации в разных физических системах связаны с флуктуационными явлениями. Поэтому вполне естественной представляется идея связать шум *1/f* с пространственно неоднородными флуктуациями различных физических величин и кинетическими явлениями. Источниками шума *1/f* могут быть флуктуации тока (сопротивления) [5], флуктуации температуры [6], флуктуации поляризации [2,3], возникновение и движение точечных дефектов [7], движение доменных границ [2,3], наложение и взаимодействие фазовых переходов [8] и т.д.

Из всех механизмов шума *1/f* наиболее изучен токовый шум [7], тогда как другим видам шума со спектром типа *1/f* посвящено сравнительно небольшое количество экспериментальных работ.

В данной работе ставилась задача изучить природу шума $1/f$ в смесевом композите типа пьезоэлектрик - феррит различного состава (x)PZT – (1-x)MZF.

1. Методика измерения и образцы. Смесевые композиты (x)$PbZr_{0,53}Ti_{0,47}O_3$ – (1-x)$Mn_{0,4}Zn_{0,6}Fe_2O_4$ [(x)PZT – (1-x)MZF] с x = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 и 1 были приготовлены по стандартной керамической технологии [9]. Спекание промышленных порошков PZT и MZF проводилось в атмосфере воздуха при температуре от 1443 до 1473 K, в зависимости от состава, в течение 5 ч. Образцы, используемые в диэлектрических измерениях, имеют размеры 8 x 4,5 x 1,5 мм^3. Электроды наносились на наибольшие поверхности образцов методом вжигания серебряной пасты при 873 K в течение 30 мин.

Рентгеноструктурный анализ и микрофотографии подтвердили наличие в полученных композитах только двух фаз: со структурой перовскита и со структурой шпинели.

Измерение диэлектрической проницаемости ε' и тангенса угла диэлектрических потерь tgδ образцов композита (x)PZT-(1-x)MZF осуществлялось с помощью прецизионного измерителя LCR metr BR2876 в интервале частот 200 Гц – 50 кГц в режиме нагрева со скоростью 2 K/мин в диапазоне температур от комнатной до 770 K.

2. Результаты эксперимента и обсуждение. Закономерности поляризационного шума типа *1/f* в композите (x)PZT-(1-x)MZF с $x = 0{,}2$; 0,4; 0,6; 0,8; 0,9 и 1,0 были изучены, используя измерения диэлектрической дисперсии (рис. 1). Видно, что при температуре 593 K на кривых мнимой компоненты диэлектрической проницаемости ε'' как функции температуры T для PZT (рис. 1 а) наблюдаются пики, связанные с сегнетоэлектрическим фазовым переходом (ФП).

Увеличение содержания феррита в композите приводит к тому, что обнаруженные максимумы размываются, и зависимости ε'' (T) становятся неаномальными кривыми, которые сильно зависят от частоты измерительного поля *f*, причём ε'' уменьшается по величине с ростом *f*. Установлено, что размытие сегнетоэлектрического ФП обусловлено замещением ионов сегнетоэлектрической фазы ионами ферритовой фазы [10]. В данном случае ионы ферритовой фазы можно рассматривать как дефекты, приводящие к композиционному разупорядочению катионов в решётке перовскита, что приводит к флуктуациям состава, возникновению полярных областей с локальными температурами перехода и релаксационному характеру диэлектрической поляризации. При этом спектральная плотность

$$S(\omega) \ = \varepsilon''/\omega \sim f^{-\alpha}\,, \tag{1}$$

где α – показатель, который характеризует спонтанно флуктуирующий дипольный момент $p(t)$ в гетерогенных системах.

Согласно [2,3], диэлектрическая релаксация вызывает шум, спектральная плотность $S(\omega)$ которого может быть аппроксимирована степенной функцией.

Дипольный момент $p(t)$ может быть найден из флуктуационно-диссипативной теоремы, справедливость которой была доказана для дипольных и спиновых стекол [11] даже в области температур ниже температуры замораживания, где время релаксации t становится неограниченно большим.

Величина α в выражении (1) определяется экспериментально из зависимости $S(\omega) = \varepsilon''/\omega$, построенной в виде функции от $\omega = 2\pi f$ в двойном логарифмическом масштабе.

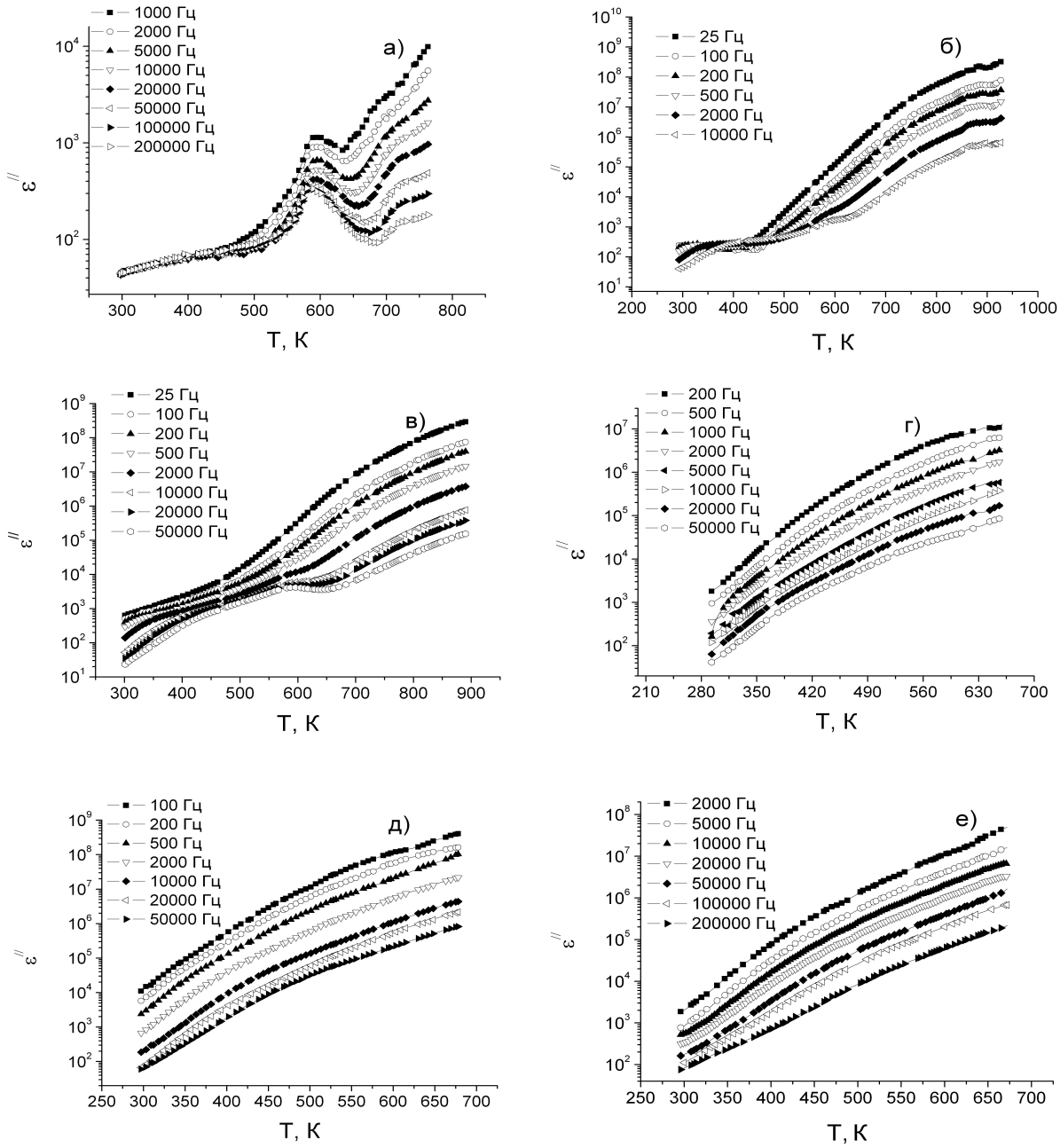


Рис. 1. Температурные зависимости мнимой компоненты диэлектрической проницаемости ε'' для композита (x)PZT – (1-x)MZF с x = 1 (а); x = 0,9 (б); x = 0,8 (в); x = 0,6 (г); x = 0,4 (д) и x = 0,2 (е) на различных частотах.

Частотная зависимость спектральной плотности шума для состава с $x = 0{,}6$ показана на рис. 2. Как следует из рисунка, величина $S(\omega)$ резко возрастает по мере понижения частоты измерительного поля от 2000 Гц до 25 Гц, в то время как на частотах больших чем 2000 Гц величина $S(\omega)$ практически не меняется (на рисунке не показано), т.е. форма спектральной плотности шума в зависимости от частоты представляет собой гиперболическую кривую. Ис-

пользуя данные, приведенные на рис. 2, была построена зависимость $S(1/f)$ (вставка на рис. 2).

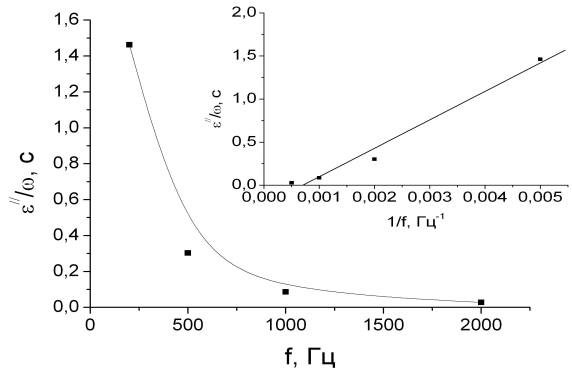


Рис. 2. Зависимость спектральной плотности шума ε''/ω от частоты для композита 0,6PZT - 0,4MZF при температуре 293 К. На вставке: зависимость ε''/ω от *1/f*.

Можно видеть, что спектральная плотность шума обратно пропорциональна частоте измерительного поля, а это даёт возможность говорить о наличии шума типа *1/f* в системе 0,6PZT – 0,4MZF. Уменьшение $S(w)$ с ростом x (рис. 3) объясняется тем, что при этом уменьшается вклад проводимости в поляризационный шум. Это также свидетельствует о том, что при увеличении содержания PZT система становится менее динамически гетерогенной.

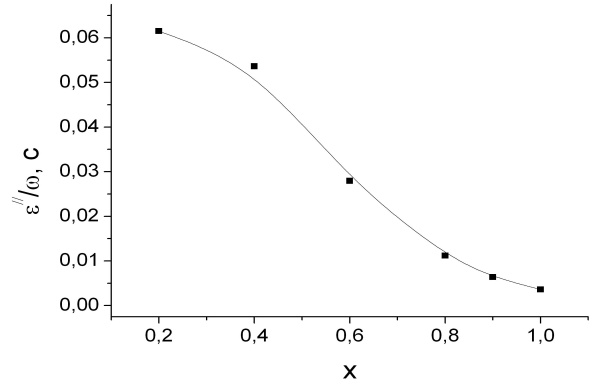


Рис. 3. Зависимость спектральной плотности шума ε''/ω от содержания PZT в композите системы (x)PZT - (1-x)MZF при частоте измерительного поля 2 кГц и температуре 293 К.

Об этом же говорит зависимость α от спонтанной деформации a (которая обратно пропорциональна размытию ФП), приведенная на рис. 4.

Для расчёта параметра a можно использовать механизм релаксации низкочастотных механических колебаний при ФП 1-го рода, основанный на термофлуктуационном возникновении зародышей новой фазы и движении фазовой границы через систему стопоров [12]. Модель [12] дает следующее выражение для высоты пика внутреннего трения:

$$Q^{-1} = \frac{G\beta a^2}{kT} \cdot \frac{m}{\omega}\,, \tag{2}$$

где m – скорость фазового превращения, пропорциональная скорости изменения температуры; β – эффективное значение объёма зародыша новой фазы; G – модуль сдвига; a – спонтанная деформация в T_C; k – постоянная Больцмана.

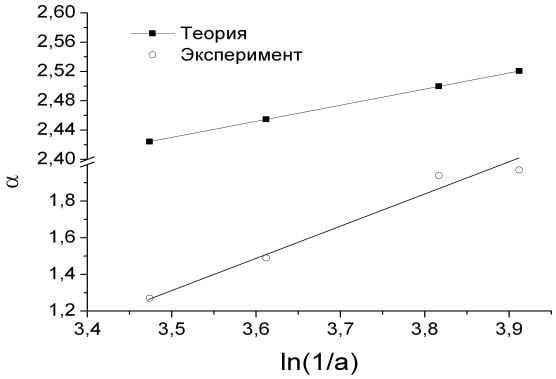


Рис. 4. Зависимость параметра α от $\ln a$ при температуре Кюри для разных составов композита (x)PZT-(1-x)MZF.

Величина a, найденная из формулы (2) при температуре Кюри, принимает значения 0,031; 0,027; 0,022 и 0,020 для образцов с x = 1,0; 0,8; 0,6 и 0,4 соответственно [10].

Экспериментальная зависимость α $(1/a)$ качественно может быть аппроксимирована эмпирическим уравнением [1]

$$\alpha = \alpha_0 - \beta \ln(\Delta z)\,, \tag{3}$$

где α_0= 1,66, β = 0,22, Δz - ширина спектра времен релаксации, которая пропорциональна размытию ФП.

Поскольку параметр a обратно пропорционален размытию ФП, то в уравнении (3) можно заменить Δz на $1/a$. Тогда рассчитанная зависимость α $(1/a)$ принимает вид, который показан на рис. 4.

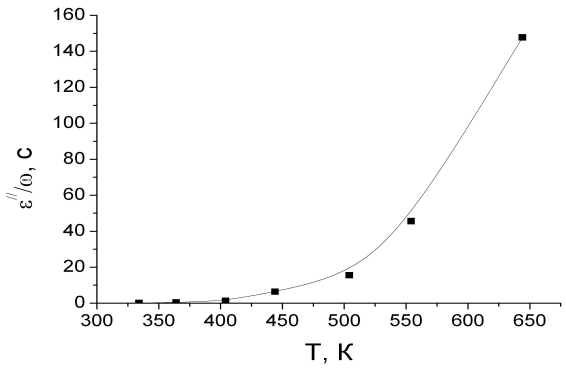


Рис. 5. Зависимость спектральной плотности шума ε''/ω от температуры для композита 0,6PZT-0,4MZF на частоте 2 кГц.

Отметим, что аналогичная зависимость α от ширины интервала наблюдаемых времен релаксации была обнаружена для различных классов стекол [1] и релаксорных сегнетоэлектриков [3].

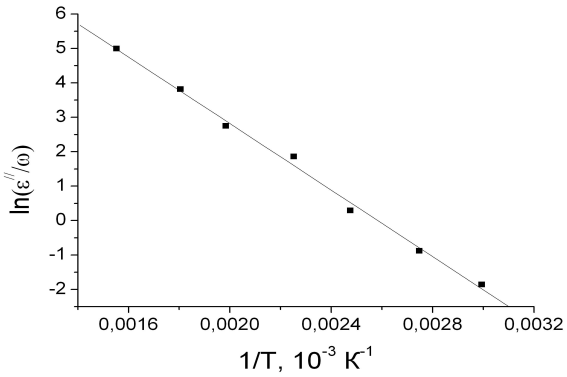


Рис. 6. Зависимость $\ln(\varepsilon''/\omega)$ от $1/T$ для композита 0,6PZT-0,4MZF на частоте 2 кГц.

Наблюдаемый в экспериментах шум $1/f$ соответствует аномальному уширению функции распределения времен релаксации τ при понижении температуры и приближении её к температуре замораживания. По-видимому, распределение τ отражает распределение энергий активации процессов флуктуационного возникновения полярных областей, их разрастания и скачкообразного преодоления соответствующими им фазовыми и доменными границами барьеров в многоминимумном потенциале, создаваемых динамически разупорядоченными ионами.

Поскольку преодоление потенциальных барьеров в дебаевской модели является термически активированным процессом, то и спектральная плотность шума должна подчиняться аррениусовской зависимости

$$S(\omega) = \varepsilon''/\omega \sim \exp(-U/kT)\,, \tag{4}$$

где U – энергия активации; k – постоянная Больцмана.

Согласно уравнению Аррениуса, повышение температуры должно приводить к росту спектральной плотности шума. Эксперименты (рис. 5) показали, что это действительно так. Величина U для композита 0,6PZT-0,4MZF определялась из зависимости $\ln(\varepsilon''\ /\omega) = f(1/T)$ на частоте 2 кГц и составила 0,42 эВ (рис. 6). Следовательно, преодоление потенциальных барьеров границами полярных областей и доменными границами является термически активированным процессом.

Естественно, вклад в шум $1/f$ может давать не только движение доменных и межфазных границ в потенциальном рельефе, содержащем сложную иерархию состояний, но также и флуктуации температуры, электропроводности и другие процессы. Однако времена релаксации, обусловленные взаимодействием ионов с доменными и фазовыми границами, обычно на много порядков превосходят как время свободного пробега электронов, так и время релаксации температуры в тонком образце. Поэтому шум $1/f$, обусловленный случайными процессами зародышеобразования полярных областей и их релаксацией в результате термоактивированного преодоления барьеров границами полярных областей и доменными границами, может быть на низких частотах $\omega < 1/\tau$ определяющим и превосходить шумы, вызванные флуктуациями температуры и числа носителей заряда.

Выводы. Таким образом, в смесевом магнитоэлектрическом композите (x)PZT-(1-x)MZF в интервале температур 334 – 644 К обнаружен поляризационный шум, спектральная плотность

которого ε''/ω обратно пропорциональна частоте измерительного поля f, т.е. шум типа $1/f$. Поляризационный шум $1/f$ обусловлен случайными процессами зародышеобразования полярных областей и движения доменных границ в процессе термоактивированного преодоления энергетических барьеров, создаваемых динамически разупорядоченными ионами. Увеличение спектральной плотности шума при уменьшении x свидетельствует об увеличении вклада проводимости в диэлектрические потери и, следовательно, в поляризационный шум.

Работа выполнена в рамках госконтракта ГК №14.740.12.0855 «Изучение влияния особенностей структуры на физические свойства перспективных функциональных и конструкционных материалов (наноматериалов)» на оборудовании Центра коллективного пользования «Диагностика структуры и свойств наноматериалов» БелГУ

Литература

1. Careri G., Consolini G., Kutnjak Z., Filipic C. and Levstik A. 1/f noise and dynamical heterogeneity in glasses // Phys. Rev. E. – 2001. – 64. – P.052901(1-4).

2. Гриднев С.А., Цоцорин А.Н., Калгин А.В. Низкочастотная диэлектрическая релаксация (шум 1/f) в релаксорах системы (1-x) PMN-(x)PZT // Известия РАН. Сер. Физическая. – 2007. – 71;10. – С.1416-1419.

3. Gridnev S.A., Tsotsorin A.N. and Kalgin A.V. Low-frequency 1/f noise in solid solution based on lead magnesium niobate // Phys. Stat. sol.(b). – 2008. – 245;1. – P.224-226.

4. Rychetsky I., Kamba S., Porokhonskyy V., Pashkin A., Savinov M., Bovtun V., Petzelt J., Kosec M. and Dressel M. Frequency-independent dielectric losses (1/f noise) in PLZT relaxors at low temperatures // J. Phys.: Condens. Matter. – 2003. – 15;35. – P.6017-6030.

5. Геращенко О.В. Аномально низкий токовый шум в наноструктурной керамике NdFeBC // Письма в ЖТФ. – 2008. – 34;3. – С.70-74.

6. Коган Ш.М. Электронный шум и флуктуации в твёрдых телах / Ш.М. Коган. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 368 с.

7. Коган Ш.М. Низкочастотный токовый шум со спектром типа 1/f в твёрдых телах // УФН. – 1985. – 145;2. – С.285-328.

8. Коверда В.П., Скоков В.Н. Масштабные преобразования 1/f флуктуаций при неравновесных фазовых переходах // ЖТФ. – 2004. – 74;9. – С.4-8.

9. Окадзаки К. Технология керамических материалов / К. Окадзаки. – М.:Энергия, 1976. – 336 с.

10. Gridnev S.A., Kalgin A.V. Mutual doping of components in magnetoelectric particulate PbZr0,53Ti0,47O3-Mn0,4Zn0,6Fe2O4 composite // Phys. Stat. sol.(b). – 2010. – 397. – P.1769-1772.

11. Reim W., Koch R.H., Malozemoff A.P., Ketchen M.B. and Maletta H. Magnetic equilibrium noise in spin-glasses: Eu0.4Sr0.6S // Phys. Rev. Lett. – 1986. – 57. – P.905-908.

12. Gridnev S.A. The investigation of low-frequency acoustic properties of ferroelectrics and ferroelastics by torsion pendulum technique // Ferroelectrics. – 1990. – 112. – P.107-127.

POLARIZATION 1/f NOISE IN THE PARTICULATE MAGNETOELECTRIC COMPOSITE (x)PZT– (1-x)MZF

S.A. Gridnev, A.V. Kalgin

Voronezh State Technical University,
Moskovskii av., 14, Voronezh, 394026, Russia, e-mail: Russia, s_gridnev@mail.ru
Voronezh State Technical University,
Moskovskii av., 14, Voronezh, 394026, Russia, e-mail: kalgin_alexandr@mail.ru

Abstract. Using the dielectric spectroscopy method, the polarization *1/f* noise in the particulate magnetoelectric composite (x)$PbZr_{0,53}Ti_{0,47}O_3$–(1-x)$Mn_{0,4}Zn_{0,6}Fe_2O_4$ [(x)PZT–(1-x)MZF] with x = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 0,9 and 1,0 at frequencies of 200 Hz – 50 kHz over a temperature range from room temperature to 770 K has been studied. It is established that the *1/f* noise in the composite (x)PZT–(1-x)MZF is caused by polarization fluctuations and its spectral density depends on the composite composition and temperature.

Keywords: magnetoelectric composite, dielectric permittivity, noise spectral density, polarization fluctuations, phase transition, boundaries of polar regions, domains.

УДК: 548.4; 538.951-405

ОСОБЕННОСТИ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОГО ВНУТРЕННЕГО ОКИСЛЕНИЯ СПЛАВА V-4Ti-4Cr

И.А. Дитенберг, А.Н. Тюменцев, С.В. Овчинников, К.В. Гриняев

Томский государственный университет,
пр. Ленина 36, Томск, Россия, 634050, e-mail: ditenberg_i@mail.ru

Аннотация. Исследованы особенности метода низкотемпературного внутреннего окисления, как способа повышения высокотемпературной прочности сплава V-4Ti-4Cr.

Ключевые слова: сплавы ванадия, прочность, термическая стабильность.

1. Введение. В работах [1, 2] на примере сплавов V-Zr, V-Cr-Zr, V-Mo-Zr была показана высокая эффективность метода внутреннего окисления (ВО) при формировании структурных состояний, обеспечивающих значительное повышение температуры рекристаллизации этих сплавов. В настоящей работе проведено исследование возможности применения низкотемпературного ВО в качестве метода повышения высокотемпературной прочности сплава системы V-4Ti-4Cr путём совмещенного дисперсного и субструктурного упрочнения.

2. Материалы и методика проведения эксперимента. Использовался сплав V-4,36Cr-4,21Ti-0,013C-0,011N-0,02O (вес. %). Низкотемпературное диффузионное легирование проведено по схеме, аналогичной [1], с той разницей, что кратковременные отжиги образцов на

воздухе выполнены при T = (580-620) °C, а последующая термообработка в вакууме при температурах 620 и 800 °C. При этом конкретные режимы отжигов определяются концентрацией вводимого кислорода и толщиной образцов. Этапы термомеханической обработки проведены аналогично режиму II [3].

3. Результаты исследования. Проведенное исследование показало, что обработка методом ВО значительно повышает термическую стабильность микроструктуры сплава. После отжига при T = 900 °C по всему сечению образцов обнаруживается полное подавление рекристаллизации (рис. 1 а). По данным просвечивающей электронной микроскопии, последнее обусловлено эффективным закреплением элементов дефектной субструктуры высокодисперсными частицами второй фазы с размерами от нескольких до нескольких десятков нанометров. При более высоких температурах отжига эффективность обработки зависит от расстояния от поверхности образцов.

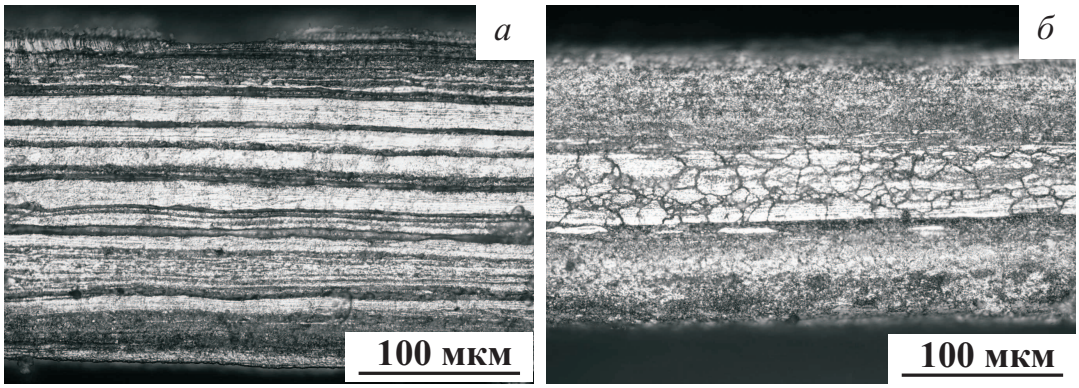


Рис. 1. Микроструктура сплава V-4Ti-4Cr после ВО и ТМО по режиму II:
а - отжиг 900 °C 1 час; б - отжиг 1000 °C 1 час. Металлография.

После отжига при T = 1000 °C рекристаллизация полностью подавлена в поверхностном слое толщиной (100-120) мкм (рис. 1 б), в то время как во внутреннем слое толщиной около 50 мкм обнаруживаются зёрна неправильной формы, свидетельствующие о развитии в этом слое первичной рекристаллизации. Повышение температуры отжига до (1200-1300) °C приводит к постепенному увеличению размеров этого слоя и сфероидизации зёрен, свидетельствующей о протекании в нём собирательной рекристаллизации. Однако размер формирующихся при этом зёрен, даже после отжига при T = 1300 °C, оказывается в несколько раз меньше, чем после отжига при 1000 °C образцов, обработанных по традиционному режиму ТМО [3]. Следовательно, в этом слое формирующиеся в процессе химико-термической обработки частицы второй фазы существенно ограничивают миграцию границ и рост зёрен.

Увеличение температуры приводит к коагуляции высокодисперсных фаз. При этом после отжига при T = 1000 °C обнаружена высокая плотность тонких пластинчатых выделений второй фазы с характерными размерами от 50 до 300 нм и толщиной до (10-20) нм (рис. 2 а). Отжиги при температурах 1200-1300 °C приводят к увеличению размеров частиц, которые достигают субмикронных и микронных размеров. Эти частицы тормозят миграцию границ зёрен и обеспечивают образование в поверхностных слоях мелкокристаллической структуры с размерами кристаллитов (зёрен и субзёрен) от 1 до 3 мкм (рис. 2 б).

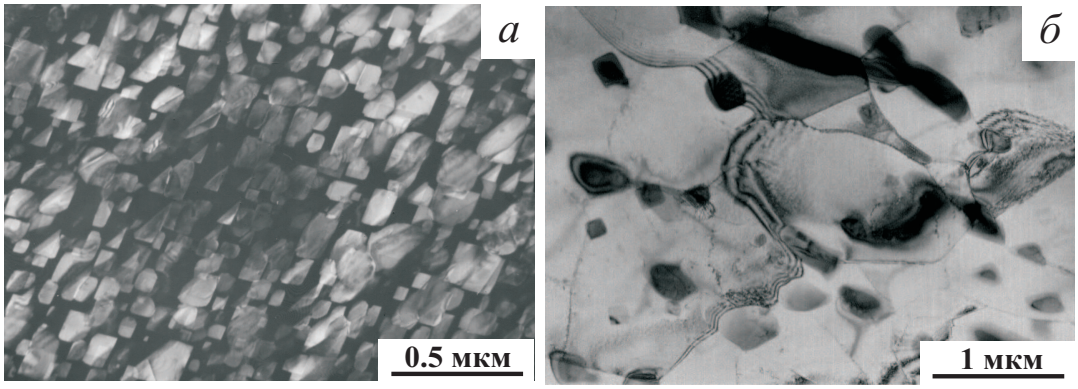


Рис. 2. Микроструктура сплава после ВО, ТМО по режиму II
и последующих одночасовых отжигов при 1000 °С (а) и 1200 °С (б).
Просвечивающая электронная микроскопия.

Электронографический анализ кристаллической структуры представленных на рис. 2 пластинчатых выделений показал, что они представляют собой ГЦК фазу с параметром решётки а = 0,424 ± 0,002 нм. Широкая концентрационная область существования ГЦК оксидов TiO приводит к тому, что параметры решётки этой фазы могут значительно изменяться в зависимости от её стехиометрического состава. В сравнении со справочными данными [4], полученное в работе значение параметра решётки выделяющихся в процессе химико-термической обработки частиц идентично оксиду TiO. В таблице 1 приведены данные механических испытаний.

Таблица 1

Механические свойства сплавов V-4Ti-4Cr

Способы обработки	$\sigma_{0.1}$, МПа		δ, %	
	Т = 20 °С	Т = 800 °С	Т = 20 °С	Т = 800 °С
ТМО по режиму [3]	360	180-220	22	12
Использование ХТО	500-560	380-420	1	3

Как видно, в структурном состоянии с ультрадисперсными частицами второй фазы и полным подавлением рекристаллизации, предел текучести при Т = 800 °С увеличивается, по сравнению с ТМО по традиционному режиму почти в два раза. При комнатной температуре значение $\sigma_{0.1}$ увеличивается примерно в 1.5 раза, но повышение прочности сопровождается значительным снижением пластичности.

4. Заключение. На основе анализа влияния ВО на микроструктуру и механические свойства сплавов V-4Ti-4Cr сделано заключение, что данный метод является одним из перспективных направлений повышения термической стабильности микроструктуры и эффективности их дисперсного и субструктурного упрочнения. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Федерального агентства по образованию ГК № 14.740.11.0986.

Литература

1. Тюменцев А.Н., Пинжин Ю.П., Овчинников С.В. и др. // Перспективные материалы. – 2005. – 5. – С.5-18.

2. Тюменцев А.Н., Пинжин Ю.П., Овчинников С.В. и др. // Перспективные материалы. – 2005. – 5. – С.19-30.

3. Пинжин Ю.П., Тюменцев А.Н., Литовченко И.Ю. и др. // Физическая мезомеханика. – 2004. – 7(Спец. выпуск);Ч. 2. – С.223-226.

4. Горелик С.С., Скаков Ю.А., Расторгуев Л.Н. Рентгенографический и электронно-оптический анализ / С.С. Горелик. – М.: МИСИС, 2002. – 360 с.

FEATURES OF THE V-4Ti-4Cr ALLOY AFTER LOW-TEMPERATURE INTERNAL OXIDATION

I.A. Ditenberg, A.N. Tyumentsev, S.V. Ovchinnikov, K.V. Grinyaev

Tomsk State University,
Lenina av., 36, Tomsk, 634050, Russia, e-mail: ditenberg_i@mail.ru

Abstract. Features of the low-temperature internal oxidation method are investigated from the viewpoint of the increasing of V-4Ti-4Cr alloy high-temperature strength.

Key words: vanadium alloys, strength, thermal stability.

УДК 620.197:669:621.794

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК МДО-ПОКРЫТИЙ НА АЛЮМИНИЕВОМ СПЛАВЕ В95, СФОРМИРОВАННЫХ В СИЛИКАТНО-ЩЕЛОЧНОМ ЭЛЕКТРОЛИТЕ С ПРИСАДКОЙ НАНОЧАСТИЦ ДИОКСИДА ЦИРКОНИЯ

А.В. Желтухин[2], Р.В. Желтухин[1], А.В. Виноградов[2], А.В. Эпельфельд[1]

[1] Российский государственный технологический университет имени К.Э. Циолковского,
ул. Оршанская 3, Москва, 121552, Россия, e-mail: tompve_mati@mail.ru

[2] ОАО "Корпорация "МИТ
Березовая аллея 10/1, Москва, 127276, Россия.

Аннотация. Описано исследование зависимости характеристик МДО-покрытий на алюминиевом сплаве В95 от концентрации в силикатно-щелочном электролите нанопорошков диоксида циркония, полученных различными способами: химосаждением и в плазме СВЧ-разряда. Выявлено, что метод получения диоксида циркония и его концентрация в электролите оказывают существенное влияние на характеристики сформированных покрытий.

Ключевые слова: сплав В95, микродуговое оксидирование, характеристики покрытий, состав электролита, наночастицы диоксида циркония, плазмохимический метод, метод СВЧ-разряда.

1. Введение. Развитие авиационной промышленности связано с применением конструкционных материалов на основе таких металлов, как алюминий, магний и титан. Однако их применение ограничивается, например, низкой коррозионной стойкостью магния, недостаточной

износостойкостью алюминия [1]. Применение микродугового оксидирования (МДО-обработки) позволяет получать многофункциональные покрытия, которые обладают уникальным комплексом таких свойств, как электроизоляционные, износостойкость, коррозионная стойкость, теплостойкость [2]. В последнее время уделяется большое внимание МДО с применением ультрадисперсных присадок в электролиты. Такие присадки позволяют существенно улучшить характеристики МДО-покрытий [3]. Целью настоящей работы являлось исследование зависимости характеристик МДО-покрытий на алюминиевом сплаве В95 от концентрации в силикатно-щелочном электролите нанопорошков диоксида циркония, полученных различными способами: химосаждением и в плазме СВЧ-разряда.

2. Описание методики экспериментов. В ходе эксперимента была проведена МДО-обработка образцов из алюминиевого сплава В95 в электролите состава: едкий калий – 2 г/л; жидкое стекло натриевое – 9 г/л; нанопорошок диоксида циркония – 0; 2 и 5 г/л в анодно-катодном режиме с равными плотностями тока 5,5 А/дм^2 в течение 50; 100 и 150 мин.

3. Результаты экспериментов и их обсуждение. Анализ экспериментальных данных показал, что добавка в электролит диоксида циркония влияет на все характеристики МДО-покрытий. Так, наибольший прирост толщины зафиксирован при концентрации диоксида циркония 5 г/л, однако в случае с химосажденным диоксидом циркония сам процесс возможен только при его прерывании через 3-4 минуты и последующем удалении образовавшейся "шубы после чего процесс можно возобновлять.

В случае отсутствия паузы происходит растравливание покрытия. При добавлении диоксида циркония в количестве 2 г/л необходимость в такой очистке отсутствует, однако толщина покрытия при продолжительностях обработки 50 и 100 минут несколько снижается по отношению к толщине при обработке без присадки, а при продолжительности 150 минут наблюдается, наоборот, прирост толщины.

Наиболее существенное влияние на сквозную пористость полученных МДО-покрытий оказало внесение диоксида циркония при длительности обработки 50 мин. Однако, при длительности обработки 100 мин добавка нанопорошка ZrO_2 оказывает не такое сильное влияние. Метод получения диоксида циркония влияет на сквозную пористость полученных покрытий неоднозначно. Химосажденный диоксид циркония с концентрацией в силикатно-щелочном электролите 2 г/л при увеличении продолжительности обработки постепенно повышает пористость, а при концентрации 5 г/л – наоборот, её снижает. При использовании диоксида циркония, полученного в плазме СВЧ-разряда, при концентрации 2 г/л пористость с увеличением продолжительности обработки снижается, а при концентрации 5 г/л наблюдается максимум пористости при продолжительности МДО-обработки 100 мин.

Микротвёрдость покрытий, полученных с присадкой химосажденного диоксида циркония, меньше, чем у покрытий, сформированных с ZrO_2, полученного в плазме СВЧ-разряда, приблизительно на 130 кг/мм^2.

4. Заключение. МДО-покрытие, сформированное в электролите с присадкой нанопорошка диоксида циркония, который получен в плазме СВЧ, обладает лучшими характеристиками, чем покрытия, сформированные без присадки и с присадкой, которая получена методом химосаждения. Увеличение микротвёрдости и толщины, а также снижение сквозной пористости покрытия повышают износостойкость, коррозионную стойкость, что улучшает эксплуатационные характеристики данного сплава и расширяет область его применения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки, контракт № 14.740.11.0986.

Литература

1. Суминов И.В., Эпельфельд А.В., Людин В.Б., Крит Б.Л., Борисов А.М. Микродуговое оксидирование (теория, технология, оборудование) / И.В. Суминов. – М.: ЭКОМЕТ, 2005. – 368 с.

2. Залялетдинов И.К., Пазухин Ю.Б., Эпельфельд А.В. Модификация поверхности потоками ионов в электролитной плазме // Поверхностный слой, точность, эксплуатационные свойства и надежность деталей машин и приборов. – Москва, 1989.

3. Малышев В.Н., Зорин К.М. Формирование керамических покрытий методом микродугового оксидирования в электролитах-суспензиях // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2006. – 11. – С.34-39.

RESEARCH OF MDO-COATINGS OF THE ALUMINIUM ALLOY B95 WHICH ARE GENERATED IN THE SILIKATE-ALKALINE ELECTROLYTE WITH ADDITION OF ZIRCONIUM DIOXIDE NANOPARTICLES

A.V. Zheltuhin[2)], **R.V. Zheltuhin**[1)], **A.V. Vinogradov**[2)], **A.V. Apelfeld**[1)]

[1)] "MATI"-Russian State Technological University,
Orshanskaya st., 3, Moscow, 121552, Russia, e-mail: tompve_mati@mail.ru
[2)] Moscow Institute of Thermal Technology,
Berezovaya alleya 10/1, Moscow, 127276, Russia.

Abstract. Mado-coatings on aluminum alloy B95 have been investigated. Dependence on concentration in silikate-alkaline electrolyte nanoparticles of a zirconium dioxide of their characteristics have been studied. The nanoparticles have been obtained by various ways: chemical sedimentation and in microwave discharge plasma. It is revealed that the method of zirconium dioxide reception and its concentration in the electrolyte make essential impact on characteristics of the generated coverings.

Key words: B95 alloy, microarc oxidation, characteristics of coverings, electrolyte composition, nanoparticles of the zirconium dioxide, plasma chemical method, microwave discharge method.

УДК: 621.785.532: 621.384.5

АЗОТИРОВАНИЕ ОБРАЗЦОВ ТИТАНОВЫХ СПЛАВОВ В ПЛАЗМЕ ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА С ПОЛЫМ КАТОДОМ

И.В. Лопатин, Ю.Х. Ахмадеев

Институт сильноточной электроники СО РАН,
пр. Академический 2/3, Томск, 635055, Россия, e-mail: lopatin@opee.hcei.tsc.ru

Аннотация. Представлены результаты двух серий экспериментов по азотированию титановых сплавов в плазме несамостоятельного и самостоятельного тлеющих разрядов с полым катодом при температуре 730 °C и времени обработки 3 часа. В первом случае азотирование проводилось при высокой плотности ионного тока, поступающего на обрабатываемые образцы ($\sim$ 15 мА/см^2) при отрицательном напряжении электрического смещения $\sim$ 125 В. Во втором случае реализовывались условия с отрицательным напряжением смещения на образце $\sim$ 1500 В и плотностью ионного тока $\sim$1.3 мА/см^2. Азотирование проводилось как в среде чистого азота, так и в азотно-гелиевой смеси. Показано, что микротвёрдость увеличивается как на лицевой, так и на обратной стороне образца, однако характер и эффективность модификации поверхности зависит от условий проведения процесса.

Ключевые слова: тлеющий разряд, титановые сплавы, азотирование, твёрдость.

1. Введение. Одним из наиболее эффективных средств повышения эксплуатационных свойств изделий из титановых сплавов является использование деталей со специальными свойствами поверхностного слоя, модифицированного различными методами. В настоящее время для увеличения поверхностной твёрдости, износостойкости и коррозионной стойкости титановых сплавов используется метод диффузионного насыщения азотом в плазме газовых разрядов [1-3]. Однако недостатком таких методов является большая длительность процессов. Ранее было показано [4], что для интенсификации азотирования сталей необходимо удалять образующиеся на обрабатываемой поверхности слои оксидов с помощью ионного травления. При обработке титана образующийся на поверхности слой нитрида титана также существенно препятствует проникновению азота вглубь образца. В этом случае увеличение эффективности ионного травления обрабатываемых поверхностей в течение процесса азотирования, например, путем снижения давления рабочего газа, также представляется целесообразным. Другим методом интенсификации процесса азотирования является увеличение концентрации азота в атомарном состоянии, что возможно как за счёт повышения плотности ионного тока, так и за счёт формирования плазмообразующей смеси различных газов, например гелия с азотом [5]. Данная работа является продолжением работ по оптимизации условий азотирования титана и его сплавов в плазме разрядов различных типов. Целью данной работы было установление закономерностей азотирования в условиях с высокой плотностью тока и низкой энергией ионов с одной стороны и высокой энергией ионов при сравнительно низкой плотности ионного тока с другой при одинаковых температурах и времени обработки.

2. Описание установки и методики экспериментов. Эксперименты проводились на установке (рис. 1), собранной на основе промышленной ионно-плазменной напылительной установки ННВ-6.6-И1. Для проведения экспериментов с плазмой несамостоятельного тлеющего разряда в вакуумную камеру 2 размером 650×650×650 мм, стенки которой образовывали полый катод, помещался дополнительный цилиндрический полый катод 4 с размерами

⌀75×110 мм, изготовленный из титана, внутрь которого помещались образцы 3. Образцы были электрически соединены с полым катодом 4. В качестве материала исследования был выбран технический титан ВТ1-0 с твёрдостью 2 ГПа и титановый сплав ВТ-6 с твердостью 3.7 ГПа. Камера откачивалась турбомолекулярным насосом ТМН-500 до давления 10^{-3} Па. После установления, за счёт напуска рабочего газа в камеру, давления 8 Па включался плазмогенератор на основе дугового разряда с интегрально холодным полым катодом [6], из плазмы которого через эмиссионное окно диаметром 75 мм, перекрытое титановой сеткой 6 с геометрической прозрачностью $\sim 60\%$ в цилиндрический титановый полый катод 4 производилась эмиссия электронов с целью поддержания необходимых параметров несамостоятельного тлеющего разряда. На торце полого катода 4, с целью увеличения эффективности его работы, была установлена диафрагма с двумя отверстиями с суммарной площадью сечения ~ 7 см^2. При подаче напряжения между анодом 1 и камерой 2, под потенциалом которой находился полый катод 4, зажигался тлеющий разряд как во всём объёме камеры 2, так и внутри полого катода 4. Для проникновения в полый катод 4 потенциала, извлекающего электроны из дугового плазмогенератора, на боковых поверхностях катода 4 были сделаны щелевые отверстия, перекрытые титановой сеткой.

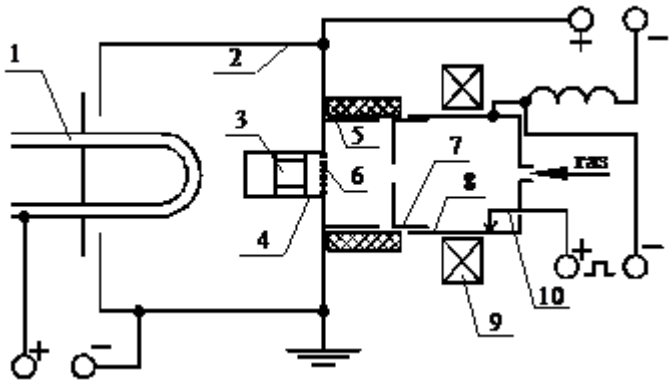


Рис. 1. Схема эксперимента по азотированию в плазме несамостоятельного разряда:

1 – анод;
2 – вакуумная камера;
3 – обрабатываемые образцы;
4 – цилиндрический полый катод;
5 – полый анод дугового плазмогенератора;
6 – титановая сетка;
7 – диафрагма;
8 – полый катод дугового плазмогенератора;
9 – магнитная катушка;
10 – поджигающий электрод.

В описанной электродной системе плотность плазмы внутри полого катода 4 оказывалась на порядки выше, чем в полости камеры 2 за счёт электронов, извлеченных из дугового плазмогенератора. Электропитание несамостоятельного тлеющего разряда осуществлялось импульсным источником питания, оснащённым системой гашения микродуг. Электропитание источника электронов осуществлялось от сварочного выпрямителя ВД-201, обеспечивающего ток до 200 А при напряжении ~ 30 В. С целью увеличения стабильности горения дугового разряда на малых токах разряда в катодную цепь плазмогенератора включался дроссель величиной 1.5 мГн. Азотирование проводилось в течение трёх часов при температуре 730 °С. В качестве рабочего газа использовался либо азот высокой чистоты, либо смесь азота (70%) и гелия (3%). Соотношение газов устанавливалось по парциальным давлениям. Температура образцов измерялась с помощью хромель-алюмелевой термопары. После обработки исследовались обе стороны образцов: лицевая, подверженная непосредственному воздействию плазмы,

и обратная, находящаяся между образцами и не подвергающаяся непосредственному воздействию плазмы. Для сравнения были проведены эксперименты по азотированию в плазме самостоятельного тлеющего разряда. В этом случае в камеру не устанавливался цилиндрический полый катод 4, источник электронов не включался (рис. 2). Разряд зажигался между полым катодом 2 образованным стенками камеры и водоохлаждаемым анодом 1. Электропитание самостоятельного тлеющего разряда осуществлялось от источника питания с тиристорной регулировкой тока в первичной обмотке повышающего трехфазного трансформатора, на выходе которого стоит выпрямитель, собранный по схеме Ларионова. Источник оснащен электронной системой зашиты, предотвращающей появление микродуг на поверхности катода. Однако данный источник имеет техническое ограничение по максимально допустимому току, который не превышает 30 А, напряжение горения разряда при этом составляло $\sim$ 560 В. Для поддержания необходимой температуры образец 3 помещался в камеру на электрически изолированном держателе и к нему прикладывалось дополнительное отрицательное электрическое смещение 1000 В относительно катода 2.

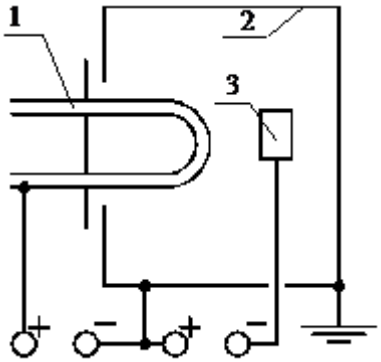


Рис. 2. Схема эксперимента по азотированию в плазме самостоятельного разряда:
1 – водоохлаждаемый трубчатый анод; 2 – вакуумная камера (полый катод);
3 – обрабатываемые образцы.

Таким образом, общее напряжение между образцом и плазмой составляло $\sim$ 1560 В, а плотность тока на поверхности образца составляла $\sim$ 1.3 мА/см^2. Данные эксперименты проводились также в атмосфере азота высокой чистоты, либо в смеси азота (7%) и гелия (30%). Рабочее давление в этих экспериментах составляло p = 1 Па. Поддержание заданной температуры образцов в процессе обработки в несамостоятельном тлеющем разряде обеспечивалось поддержанием следующих параметров разряда: напряжение горения разряда (амплитудное) $U_{тл}$ = 125 - 130 В, частота следования импульсов f = 50 кГц, коэффициент заполнения импульса D = 0.9; ток разряда (средний) $I_{тл}$ = 29 А. При этом ток дугового плазмогенератора составлял $I_{д}$ = 22 А при напряжении горения $U_{д}$ = 24 В. В процессе исследований фиксировался полный ток тлеющего разряда, замыкающийся как на полый катод 4, так и на стенки камеры. Оценки показывают, что на внутренние стенки полого катода замыкалось порядка 7-8 А, плотность тока при этом составляла $j_k \sim 15$ мА/см^2, а концентрация плазмы в полом катоде 4 составляла $n_0 \sim 10^{12}$ см$^{-3}$. На рис. 3 приведены эпюры тока и напряжения горения несамостоятельного тлеющего разряда.

Рис. 3. Осциллограммы напряжения горения (1) и тока (2) несамостоятельного тлеющего разряда: временная развертка – 5 мкс/дел; канал 1 – 50 В/дел; канал 2 – 33.3 А/дел.

Видно, что ток разряда, помимо участков с постоянным значением, имеет пики как отрицательной, так и положительной полярности. Наличие этих пиков связано с переходными процессами в плазме. Пик отрицательной полярности наблюдается на заднем фронте импульса напряжения и объясняется тем, что при резком снятии напряжения между катодом и анодом плазма разваливается, и на катод начинают замыкаться электроны. Пик положительной полярности наблюдается на переднем фронте импульса напряжения и связан с формированием и движением границы плазмы несамостоятельного тлеющего разряда.

3. Результаты экспериментов и их обсуждение. В результате азотирования в плазме несамостоятельного разряда образцы приобрели характерный для нитрида титана желтый цвет с лицевой стороны и желтый цвет с бордовым оттенком с обратной стороны (характерный для нитрида титана с повышенным содержанием азота). Результаты измерения микротвёрдости поверхности (табл. 1) показали, что твёрдость увеличилась на всех образцах как с лицевой, так и с обратной стороны. При этом микротвёдость поверхности обратной стороны образцов обработанных в плазме чистого азота при малых нагрузках на индентор (0.5 Н) выше, чем микротвёрдость на лицевой стороне для всех образцов.

Таблица 1

Зависимость твёрдости на поверхности образцов титановых сплавов после азотирования в плазме несамостоятельного тлеющего разряда от рода газа и нагрузки на индентор (обозначение: ЛС – лицевая сторона, ОС – обратная сторона).

Нагрузка, Н	Газ	ВТ6		ВТ1-0	
		ЛС *HV*, ГПа	ОС *HV*, ГПа	ЛС *HV*, ГПа	ОС *HV*, ГПа
0,5	N_2	24,9	34,3	16,8	21,5
	N_2+He	25	17,4	13,6	l15,4
1	N_2	18	18,2	12,5	16,1
	N_2+He	13,4	11,8	8,3	7,4

Это может быть связано с тем, что, несмотря на малую энергию ионов, приходящих из плазмы на поверхность лицевой стороны образца (до 125 эВ) при достаточно высокой плотности ионного тока ($\sim$ 15 мА/см^2), происходит ионное травление поверхности и образованный здесь слой нитрида титана имеет меньшую толщину, чем на обратной стороне. Вместе с тем видно, что при увеличении нагрузки на индентор микротвёрдость на обратной стороне уменьшается более существенно, чем на лицевой. Это может быть объяснено тем, что при отсутствии травления поверхности обратной стороны, образованный на поверхности нитридный слой тормозит диффузию ионов азота вглубь образца, что приводит к пересыщению нитридного слоя

азотом (о чем свидетельствует бордовый оттенок нитрида титана) и к слабо развитой зоне диффузионного насыщения под нитридным слоем. Увеличение микротвёрдости поверхности как с лицевой, так и с обратной стороны свидетельствует о том, что важную роль в процессе ионно-плазменного азотирования поверхности играет атомарный азот, присутствие которого в ионизированном состоянии с обратной стороны невозможно. С целью проверки этого утверждения в работе [5] было проведено исследование зависимости эффективности азотирования в различных азотсодержащих газовых смесях. Было показано, что добавление He в рабочую смесь при азотировании увеличивает толщину нитридного слоя, образующегося на поверхности обрабатываемых образцов и, соответственно, величину микротвёрдости поверхности. Такое увеличение объяснялось увеличением концентрации атомарного азота вблизи поверхности благодаря процессам диссоциативной перезарядки ионов в катодном слое разряда. Однако, в представленной разрядной системе проведенные эксперименты по азотированию в азотно-гелиевой смеси показали, что микротвёрдость поверхности образцов обработанных в плазме азотно-гелиевой смеси несамостоятельного тлеющего разряда во всех случаях ниже аналогичной для образцов, обработанных в чистом азоте. Это объясняется тем, что для повышения эффективности азотирования в азотно-гелиевой смеси необходимо, чтобы в катодном слое проходил процесс перезарядки. Оценки показывают, что в приведенных выше условиях ($n_0 \approx 10^{12}$ см$^{-3}$, $U_{тл} = 125$ В, p = 8 Па) ширина катодного слоя h $\approx$ 1.5 мм, и перезарядка в слое не происходит. При этом концентрация азота в камере при работе на азотно-гелиевой смеси почти в полтора раза ниже, чем при работе на чистом азоте. Пониженная концентрация азота и вызывает уменьшение интегральной микротвёрдости поверхности. При азотировании в плазме самостоятельного тлеющего разряда образцы титанового сплава ВТ1-0 не имели характерного желтого оттенка на лицевой стороне, на обратной стороне желтый цвет присутствовал, но не был таким интенсивным как на образцах, обработанных в плазме несамостоятельного разряда. Микроиндентация поверхности (табл. 2) показала, что микротвёрдость образцов выросла, однако не так существенно как при обработке в несамостоятельном тлеющем разряде.

Таблица 2

Результаты обработки образцов ВТ1-0 в плазме самостоятельного тлеющего разряда.

Нагрузка, Н	Газ	Лицевая сторона *HV*, ГПа	Обратная сторона *HV*, ГПа
0,5	N_2	8,2	9,5
	N_2+He	8,5	17
1	N_2	4,5	6
	N_2+He	4,8	8

Видно, что микротвёрдость на обратной стороне в обоих случаях выше, чем на лицевой, вне зависимости от величины нагрузки на индентор. При этом обработка в азотно-гелиевой смеси дает большее увеличение твёрдости как на лицевой, так и на обратной стороне, по сравнению с обработкой в чистом азоте. Добавление гелия в рабочую смесь в такой системе повышает концентрацию атомарного азота за счёт процесса диссоциативной перезарядки в катодном слое, так как ширина катодного слоя вблизи образцов в приведенных условиях ($n_0 \approx 10^{11}$ см$^{-3}$, U = 1540 В, p = 1 Па) составляет h $\approx$ 5 см. Однако нитридный слой на лицевой стороне при этом интенсивно стравливается, а на обратной стороне нарастает, тормозя процесс диффузии азота вглубь образца и затрудняя развитие диффузионной зоны. Исследования фазового

состава азотированных образцов, выполненные методами рентгеноструктурного анализа, показали, что азотирование приводит к формированию поверхностного слоя, имеющего сложный фазовый состав, включающий следующие фазы: TiN, Ti_2N, Ti_4N_3, $TiN_{0.3}$; (рис. 4).

4. Заключение. Анализ полученных данных показывает, что диффузионное насыщение азотом титановых сплавов при одинаковых температуре образцов и времени экспозиции, в зависимости от условий азотирования, может приводить либо к образованию диффузионной зоны твёрдого раствора азота вблизи поверхности при интенсивном ионном травлении в процессе обработки, либо к образованию нитридного слоя на поверхности при высокой плотности ионного тока. Добавление в плазмообразующую смесь He увеличивает эффективность процесса азотирования только в случае, когда в катодном слое создаются условия для диссоциативной перезарядки, то есть когда величина катодного слоя достаточна для протекания такого процесса.

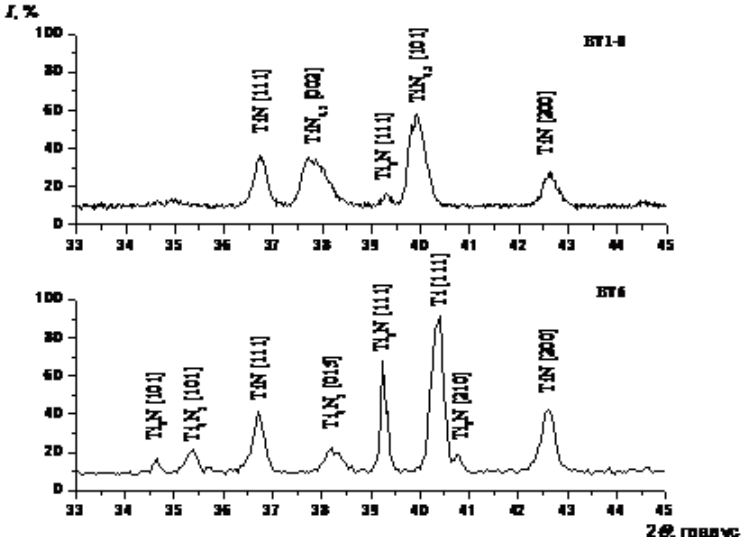


Рис. 4. Участок рентгенограммы поверхностного слоя титана ВТ1-0 и ВТ6, подвергнутого азотированию в плазме несамостоятельного тлеющего разряда с полым катодом.

В связи с вышесказанным, целесообразна разработка двухступенчатого процесса азотирования, который будет включать в себя формирование диффузионной зоны на первом этапе и нитридного слоя на втором. При этом на первом этапе концентрация плазмы должна быть высокой для увеличения концентрации атомарного азота, а напряжение на образце и давление рабочего газа должны быть таковым, чтобы образующийся катодный слой позволял протекание в нем процессов диссоциативной рекомбинации, для увеличения вероятности которой целесообразно добавлять в рабочую смесь He.

Работа выполнена в рамках государственного контракта № 14.740.11.0986 "Проведение поисковых научно-исследовательских работ в целях развития общероссийской мобильности в области технических и инженерных наук" по теме: "Новые функциональные материалы и покрытия для энергетики и двигателестроения" на базе НОиИЦ "Наноструктурные материалы и нанотехнологии" с использованием аналитического оборудования Центра коллективного пользования "Диагностика структуры и свойств наноматериалов" НИУ БелГУ.

Литература

1. Rie K.-T., Lampe Th. Thermochemical surface treatment of titanium and titanium alloy Ti-6Al-4V by low energy nitrogen ion bombardment // Mater. Sci. Eng. – 1985. – 69. – P.437.

2. Неровный В.М., Перемитько В.В. Азотирование поверхности титановых сплавов дуговой плазмой низкого давления // ФиХОМ. – 1995. – 3. – С.49.

3. Будилов В.В., Агзамов Р.Д. Ионное азотирование поверхности конструкционных сталей и сплавов в тлеющем разряде на основе эффекта полого катода // Proc. of 6th Intern. Conf. on Modif. of Mater. with Particle Beams and Plasma Flow. Tomsk. Russia. 2002. – P.428.

4. Щанин П.М., Коваль Н.Н., Гончаренко И.М., Григорьев С.В. Азотирование конструкционных сталей в газовых разрядах низкого давления // ФиХОМ. – 2001. – 3. – С.16.

5. Ахмадеев Ю.Х., Иванов Ю.Ф., Коваль Н.Н. и др. Азотирование титана ВТ1-0 в несамостоятельном тлеющем разряде низкого давления в различных газовых средах // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2008. – 2. – С.108.

6. Лопатин И.В., Ахмадеев Ю.Х. Несамостоятельный тлеющий разряд низкого давления и его применение // Материалы IV Всероссийской конференции молодых ученых "Материаловедение, технологии и экология в 3-м тысячелетии Томск, Россия, 19-21 октября 2009 г. – С.26-30.

NITRIDING OF TITANIUM ALLOYS SAMPLES IN PLASMA OF GLOW DISCHARGE WITH HOLLOW CATHODE

I.V. Lopatin, Yu.H. Akhmadeev

High Current Electronics Institute SB RAS,
Academic Avenue 2/3, Tomsk, 635055, Russia, e-mail: lopatin@opee.hcei.tsc.ru

Abstract. The results of two experiment series with titanium alloys nitriding in the plasma of non-self-sustained and self-sustained glow discharges with the hollow cathode at the temperature 730 °C during the treat time 3 hours are presented. In the first case, the nitriding was performed at high density of ion current arriving on the samples ($\sim$ 15 mA/cm^2) with a negative electrical bias voltage $\sim$ 125 V. In the second case, the conditions with a negative bias voltage on a sample of $\sim$ 1500 V and the ion current density of $\sim$ 1.3 mA/cm^2 were implemented. The nitriding was carried out in pure nitrogen and in nitrogen-helium mixture. It is shown that microhardness increases on both sides of the samples (front and back), but the nature and efficiency of surface modification depends on process conditions.

Keywords: glow discharge, titanium alloys, nitriding, hardness.

УДК 538.97; 539.216.2; 539.231

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ МИКРОСТРУКТУРЫ НАНОКОМПОЗИТНЫХ СВЕРХТВЁРДЫХ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ TiN

В.Ю. Мошков, А.Д. Коротаев, С.В.Овчинников

ОСП «Сибирский физико-технический институт имени акад. В.Д. Кузнецова»
Томского государственного университета,
пл. Новособорная 1, Томск, 634050, Россия, e-mail: moshkov_v@mail.ru

Аннотация. Методом просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ), измерением микротвёрдости и скретч-тестированием проведены исследования особенностей структурно-фазового и упруго-напряжённого состояния многоэлементных покрытий системы Ti-C-Ni-Cr-Al-Si-Cu-O-N в исходном состоянии и после отжигов до 1000 °C.

Ключевые слова: многокомпонентные сверхтвёрдые покрытия, упруго-напряжённое состояние.

1. Введение. С применением физических принципов создания нанокомпозитных покрытий с самоорганизацией микроструктуры в процессе спинодального распада при их росте, который существенно ограничивает выбор составов и условий их получения, были созданы сверхтвёрдые (H_μ>40 ГПа) нанокомпозитные покрытия двух типов n-MeN/a-фаза [1] и n-MeN/Me [2] с невысокой когезивной прочностью.

С нашей точки зрения в качестве перспективных нанокомпозитных покрытий следует использовать многоэлементные композиции, синтезированные в соответствии с предложенным в [3] принципом их конструирования.

В качестве экспериментального подтверждения работоспособности предложенных принципов конструирования многоэлементных нанокомпозитных покрытий в настоящей работе выполнено экспериментальное исследование микроструктуры, фазово-структурного и упруго-напряженного состояния, твёрдости и термической стабильности указанных характеристик покрытий состава Ti-29.5, Al-9.7, Si-1.6, Ni-7.7, Cr-3.9, Cu-3.6, O-1.2, C-4.1, N-36.8 (ат. %).

2. Материалы и методика проведения эксперимента. Покрытия получены с использованием плазменного магнетронно-дугового комплекса «СПРУТ» [4]. В качестве основного метода аттестации структурно-фазового и упруго-напряжённого состояний в данной работе использован метод электронно-микроскопического темнопольного анализа изгиба-кручения кристаллической решётки [5].

3. Результаты исследования. Методом электронной микроскопии в покрытиях, после напыления, обнаруживается фаза TiN с параметром решётки a = 0.414 нм. При темнопольном анализе микроструктуры (рисунок 1 *а*), выполненном при различных углах наклона гониометра с интервалом 1° в направлении, перпендикулярном проекции оси наклона в рефлексах (111) + (200) дифракционных колец TiN обнаруживаются сложные высокодефектные области.

Результаты анализа выделенной на рисунке 1 *б* области, проведенные с применением методики [5], показали, что в участках (1, 2) размером (10 ÷ 15) нм интервал существования дифракционного контраста обнаруживается в процессе наклона образца на 3 ÷ 4°. При этом кривизна решётки составляет $\chi_{31} = 150 \div 200$ град/мкм. Аналогичные измерения для участков (3, 5) размером около 30 нм показали значения $\chi_{31} = 90 \div 120$ град/мкм.

Следовательно, участки (1-5) могут рассматриваться как нанокристаллы с малоугловыми границами, а вся приведенная на рисунке 1 *б* область размером около 70 нм, находящаяся в отражающем положении при $(8 \div 10)^\circ$, как нанокристалл с высокоугловыми границами разориентации.

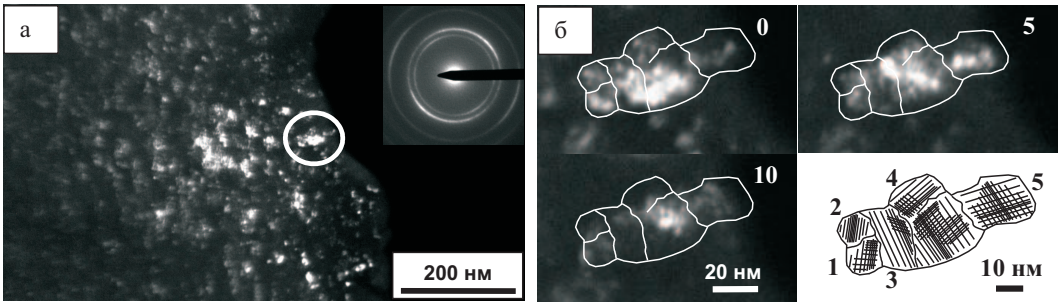


Рис. 1. *а* - ПЭМ изображение структуры, *б* - пример анализа и схема выделенной области многокомпонентного покрытия в исходном состоянии.

Таким образом, в исходных покрытиях наблюдается аналогичная ранее обнаруженной нами в покрытиях TiN, Ti-Al-Si-N, Ti-Si-B-N [5] высокодефектная двухуровневая зёренная структура. Вместе с тем, обнаруживаются индивидуальные нанокристаллы размером $10 \div 20$ нм с высокоугловыми границами и кривизной-кручением решётки в них до $\chi_{31} = 100$ град/мкм, которая уменьшается до $40 \div 50$ град/мкм после отжигов в течение 1 ч. при 1000 °C. После отжига при $T_o = 1000$ °C на картине микродифракции обнаруживаются также слабые дополнительные отражения, анализ которых свидетельствует об образовании твёрдого раствора Cu-Ni и о выделении фазы Ti_2N (рис. 2).

Высокая термическая стабильность наноструктурного состояния хорошо согласуется с данными измерения микротвёрдости. Сверхтвёрдость покрытий сохраняется практически без изменения (H_μ=46,3 - 47,1 ГПа) при отжиге до 900 °C и незначительно снижается после отжига при 1000 °C. При этом значения $H_\mu = 36$ ГПа остаются значительно выше стандартных для TiN $H_\mu = 20$ - 25 ГПа.

Результаты характеристик когезии и адгезии для исходных и отожжённых до $T_o = 1000$ °C покрытий аналогичны – обнаруживается низкий уровень акустической эмиссии и невысокие значения коэффициента трения при нагрузках до $P = 30$ Н. Это свидетельствует о достаточно высоких когезивных и адгезионных свойствах покрытий по сравнению со свойствами TiN, разрушение которого начинается при нагрузке около 10 Н и полное отслоение происходит при $P = 18$ Н.

Таким образом, качественно подтверждается представление о возможности повышения вязкости сверхтвёрдых многоэлементных покрытий в результате их легирования пластичной металлической фазой.

4. Заключение. На примере покрытий системы Ti-Al-Si-Ni-Cr-Cu-C-O-N получено экспериментальное подтверждение эффективности предложенных в [3] принципов конструирования многоэлементных нанокомпозитных покрытий, перспективных для целенаправленного увеличения твёрдости, когезивной и адгезионной прочности.

Выполненное исследование позволило обнаружить высокую кривизну-кручения наноразмерных (менее 30 нм) областей когерентного рассеяния субструктуры покрытий с размером зерна до 100 нм и отдельных нанокристаллов.

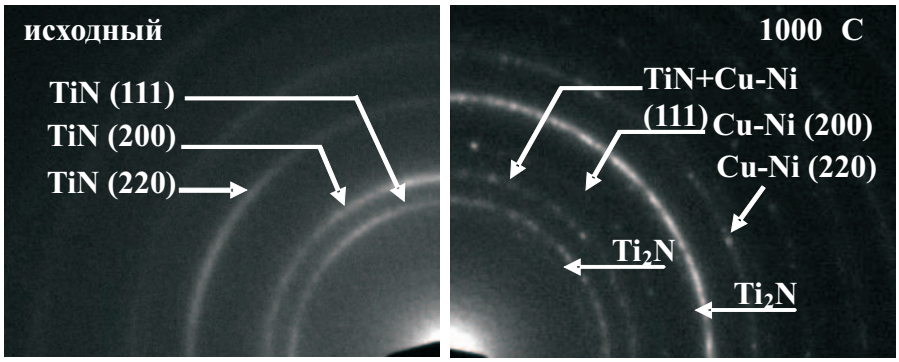


Рис. 2. Картины микродифракции многокомпонентного покрытия в состоянии после напыления и отжига 1000 °C в течение 1 ч.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Федерального агентства по образованию ГК № 14.740.11.0986.

Литература

1. Veprek S., Reiprich S. // Thin Solid Films. – 1995. – 268. - P.64-71.
2. Musil J. // Surf. Coat. Technol. – 2000. – V.125. - P.322-330.
3. Коротаев А.Д., Борисов Д.П., Овчинников С.В. и др. Материалы LI Международной конференции «Актуальные проблемы прочности». 16-20 мая 2011 г., Харьков, Украина. – С. 203.
4. Борисов Д.П., Детистов К.Н., Коротаев А.Д. и др. / Диагностика материалов / Заводская лаборатория. – 2010. – 76;12. – С.32-36.
5. Овчинников С.В., Пинжин Ю.П., Коротаев А.Д. и др. // Изв. вузов. Физика. – 2009. – № 9/2. – С.35-40.

INVESTIGATION OF MICROSTRUCTURE FEATURES OF TiN-BASED NANOCOMPOSITE SUPERHARD COATINGS

V.Yu. Moshkov, A.D. Korotayev, S.V.Ovchinnikov

V.D. Kuznetsov's sibirian physical and technical institute
of Tomsk's state university,
Novosobornaya sq., 1, Tomsk, 634050, Russia, e-mail: moshkov_v@mail.ru

Abstract. Investigations of the phase-structure and elastic-strained state features of multielement coating system Ti-C-Ni-Cr-Al-Si-Cu-O-N both at initial conditions and after annealing up to 1000 °C were carried out with the using of transmission electron microscopy, microhardness measurements and scratch tests.

Keywords: multielement superhard coatings, elastic-strained state.

УДК 538.9

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ НАНОСТРУКТУРИРОВАННЫХ ПОКРЫТИЙ $(Co_{45}Fe_{45}Zr_{10})_x(Al_2O_3)_{100-x}$

И.М. Трегубов[1)], **М.Ю. Смолякова**[2)], **М.А. Каширин**[1)], **М.К. Добрынин**[1)], **О.В. Стогней**[1)]

[1)] Воронежский государственный технический университет, Московский пр. 14, Воронеж, 394016, Россия, e-mail: ilia.tregybov@mail.ru

[2)] Белгородский государственный университет, НОиИЦ «Наноструктурные материалы и нанотехнологии», ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия.

Аннотация. Проведено исследование износостойкости и микротвёрдости тонкоплёночных нанокомпозиционных покрытий $(Co_{45}Fe_{45}Zr_{10})_x(Al_2O_3)_{100-x}$ в широком интервале концентраций металлической фазы ($30 \leq$ x ат. $\leq 65\%$). Установлено, что максимальная твёрдость (до 11 ГПа) наблюдается в композитах с концентрацией металлической фазы более 50 ат %. Показано, что нанесение на ситалловую подложку СТ-50 наногранулированного композита приводит к увеличению износостойкости более чем на два порядка относительно чистого ситалла. Фактор износа для композита $(Co_{45}Fe_{45}Zr_{10})_x(Al_2O_3)_{100-x}$ составляет $0,4 \cdot 10^{-6} \div 1,3 \cdot 10^{-6}$ мм^{3}Н$^{-1}$м$^{-1}$.

Ключевые слова: наногранулированные композиционные пленки, износостойкость.

1. Введение. Эффективным средством повышения износостойкости металлических изделий является создание на их поверхности упрочняющих покрытий, получаемых различными методами [1-2]. В настоящее время одним из методов упрочнения поверхности металлических материалов является создание нанокомпозитов металл-керамика, так как перспективным представляется сочетание в одном материале преимуществ, которыми обладает керамика и металлические сплавы по отдельности. В данной работе исследованы механические характеристики наноструктурных покрытий, сформированных из композиционных материалов $(Co_{45}Fe_{45}Zr_{10})_x(Al_2O_3)_{100-x}$, и установлены зависимости величины фактора износа и величины микротвёрдости композитов от концентрации металлической фазы.

2. Методика. Композиты получались методом ионно-лучевого распыления составных мишеней. Осаждение компонентов материала производилось на ситалловые подложки СТ-50. Толщина покрытий составляла $\sim 5 \div 6$ мкм. Наногранулированность структуры композитов подтверждалась электронно-микроскопическими исследованиями образцов ($600 \div 800$ А), напыленных на монокристаллы NaCl. Химический состав образцов контролировался рентгеновским электронно-зондовым микроанализом. Исследование износостойкости композиционных покрытий проводилось с помощью автоматизированной машины трения по схеме испытания "шарик-диск" [3]. В качестве материала контртела был выбран корундовый шарик диаметром 6 мм. Трибологические характеристики исследуемых образцов оценивали в зависимости от прикладываемой нагрузки 2 и 4 Н, при скорости вращения 7 см/сек и пути трения 200 м. Измерение микротвёрдости нанокомпозитов осуществлялось по методу Виккерса с помощью прибора ПМТ-3М при нагрузке на индентор 0,29 и 0,49 Н.

3. Результаты. Микроструктура композита $(Co_{45}Fe_{45}Zr_{10})_{55}(Al_2O_3)_{45}$ показана на рис. 1. Она представляет собой систему, которая состоит из металлических гранул, распределённых в

керамической матрице. При меньшей концентрации металлической фазы гранулы становятся более изолированными друг от друга, и их размеры снижаются, при увеличении концентрации образуется больше металлических кластеров [4]. Электронная дифракция, полученная от образцов $(Co_{45}Fe_{45}Zr_{10})_x(Al_2O_3)_{100-x}$, свидетельствует о том, что как керамическая матрица, так и металлическая фаза композитов являются аморфными.

Механические свойства нанокомпозитных покрытий зависят от объёмного соотношения фаз, химического взаимодействия между фазами и их микроструктуры, поэтому одним из наиболее важных вопросов, является вопрос о влиянии морфологии композитов на их механические свойства. Морфология, в свою очередь, определяется объёмным соотношением фаз и химическим взаимодействием между ними, поэтому в данной работе использовались покрытия, содержащие различное количество металлической фазы ($30 \leq$ x ат. $\leq 65\%$).

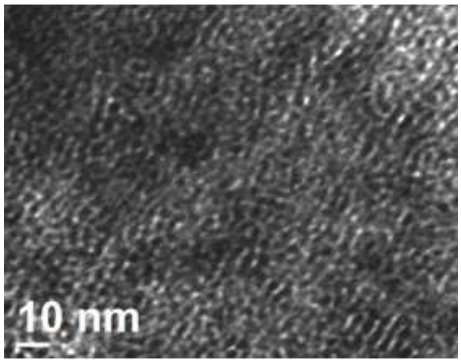


Рис. 1. Электронная микрофотография композита $(Co_{45}Fe_{45}Zr_{10})_{55}(Al_2O_3)_{45}$.

Исследование износостойкости ситалловой подложки и композиционных покрытий $(Co_{45}Fe_{45}Zr_{10})_x(Al_2O_3)_{100-x}$, показало, что износостойкость композитов на два порядка выше износостойкости ситалла (рис. 2). Для ситалла фактор износа составил: $2,0 \cdot 10^{-4}$ и $2,3 \cdot 10^{-4}$ мм^{3}Н$^{-1}$м$^{-1}$, при прикладываемой нагрузке на контртело 2 и 4 Н соответственно. Стоит отметить, что значения фактора износа для ситалла практически не изменяются при увеличении нагрузки в 2 раза. Нанесение на ситалловую подложку наногранулированного композита $(Co_{45}Fe_{45}Zr_{10})_x(Al_2O_3)_{100-x}$ приводит к снижению фактора износа, измеряемого при 2 Н до $0,4 \cdot 10^{-6} \div 1,3 \cdot 10^{-6}$ мм^{3}Н$^{-1}$м$^{-1}$, в зависимости от содержания металлической фазы. Причём, увеличение концентрации металлической фазы приводит к ухудшению износостойкости композитов. Снижение износостойкости наблюдается в тех композитах, чей состав находится за порогом перколяции. Увеличение нагрузки до 4 Н приводит к разрушению композиционного покрытия. По всей видимости, разрушение плёнки происходит вследствие низкой адгезии покрытия к подложке. Об этом свидетельствует внешний вид подложки в области следа от контртела при нагрузке. Поверхность подложки слабо деформирована, в то время как покрытие с неё удалено практически полностью (рис. 3).

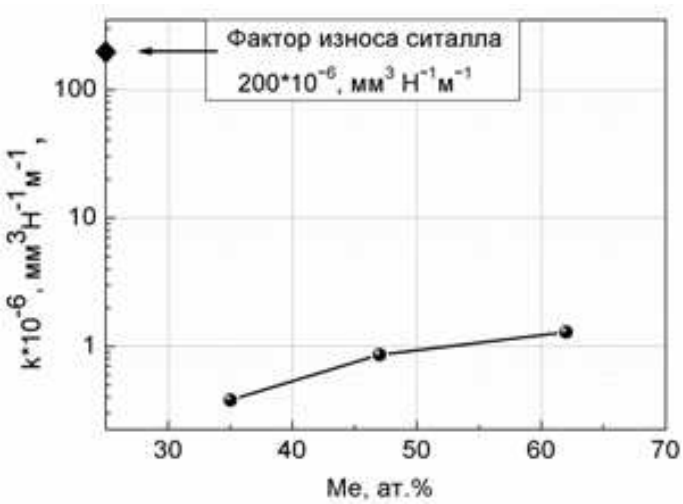


Рис. 2. Концентрационная зависимость фактора износа, измеренного при нагрузке 2 Н нанокомпозитов $(Co_{45}Fe_{45}Zr_{10})_x(Al_2O_3)_{100-x}$.

Рис. 3. Вид ситалловой подложки с нанесенным покрытием нанокомпозита $(Co_{45}Fe_{45}Zr_{10})_{38}(Al_2O_3)_{62}$ после испытаний при нагрузке на держатель контртела 4 Н.

На рис. 4 показана концентрационная зависимость микротвёрдости нанокомпозитов $(Co_{45}Fe_{45}Zr_{10})_x(Al_2O_3)_{100-x}$. Очевидно, что микротвёрдость монотонно возрастает с увеличением концентрации металлической фазы, достигая максимальных значений при ~60 ат.%, после чего начинает резко снижаться. Возможно, это связано с тем, что в интервале составов 30-55 ат.% $Co_{45}Fe_{45}Zr_{10}$ морфология композитов представляет собой совокупность наноразмерных металлических гранул или небольших цепочек из них, окруженных керамической прослойкой (рис. 1). При этом, обычный механизм пластического деформирования в такой структуре объёмного аморфного металлического сплава блокируется вследствие малости металлических областей. Межзёренное скольжение также блокируется, поскольку в композитах рассматриваемого концентрационного диапазона металлические гранулы изолированы друг относительно

друга керамическими прослойками. Блокирование смещения зёрен друг относительно друга способствует высокой прочности и износостойкости нанокомпозитов металл-керамика. С другой стороны, наличие металлических областей в объёме керамической фазы-"сетки" препятствует линейному развитию микротрещин при деформировании композиционного покрытия, обеспечивая его высокую прочность. Снижение микротвёрдости в композитах, содержащих металлическую фазу в количестве, превышающем 60 ат.% $Co_{45}Fe_{45}Zr_{10}$, обусловлено разрывом армирующей керамической сетки и формированием больших металлических кластеров, в которых возможна пластическая деформация.

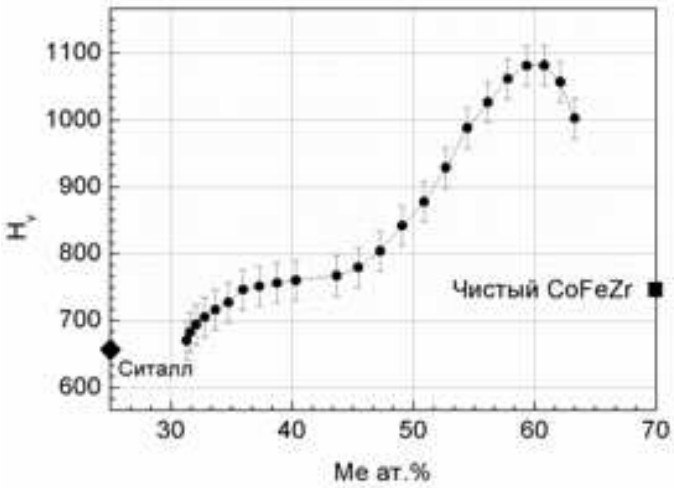


Рис. 4. Концентрационная зависимость микротвёрдости нанокомпозитов $(Co_{45}Fe_{45}Zr_{10})_x(Al_2O_3)_{100-x}$.

4. Выводы. Показано, что нанесение на ситалловую подложку наногранулированного композита $(Co_{45}Fe_{45}Zr_{10})_x(Al_2O_3)_{100-x}$ приводит к увеличению износостойкости, измеряемой при нагрузке 2 Н, более чем на три порядка. Фактор износа уменьшился с $2,0 \cdot 10^{-4} \div 2,3 \cdot 10^{-4}$ мм^{3}Н$^{-1}$м$^{-1}$ (ситалл) до $0,3791 \cdot 10^{-6}$ - $1,289 \cdot 10^{-6}$ мм^{3}Н$^{-1}$м$^{-1}$ (композит). Возрастание концентрации металлической фазы в композите приводит к снижению его износостойкости. Установлено, что концентрационная зависимость микротвёрдости нанокомпозитов $(Co_{45}Fe_{45}Zr_{10})_x(Al_2O_3)_{100-x}$ немонотонна и проходит через максимум. В интервале составов 30-60 ат.% $Co_{40}Fe_{40}Zr_{20}$ наблюдается возрастание микротвёрдости, достигающей максимального значения $\sim$ 11 ГПа при концентрации металлической фазы 60 ат. %. Предполагается, что высокие механические свойства композитов обусловлены особенностями их морфологии, которая представляет собой сочетание двух различных наноструктурированных сред: металлической и керамической, с высокой объёмной долей границ раздела фаз, препятствующих как межзёренному скольжению, так зарождению и развитию дислокаций, а также хрупкому растрескиванию.

Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" г/к № 14.740.11.0986 и гранта РФФИ 09-02-97536-р центра.

Литература

1. Xu G. Characteristics of Ni-based coating layer formed by laser and plasma cladding processes / G. Xu, M. Kutsuna, Z. Liu, H. Zhang // Materials Science and Engineering A. – 2006. – 417. – P.63-72.

2. Kim H.-J. Assessment of wear performance of flame sprayed and fused Ni-based coatings / H.-J. Kim, S.-Y. Hwang, C.-H. Lee, P. Juvanon // Surface and Coatings Technology. – 2003. – 172. – P.262-269.

3. Вершинин Д.С. Исследование трибологических свойств азотированного титанового сплава ВТ16 / Д.С. Вершинин, М.Ю. Смолякова, и др. // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2010. – 76;12. – С.45-48.

4. Ремизов А.Н. Электрические свойства нанокомпозитов аморфных сплавов $Co_{45}Fe_{45}Zr_{10}$ В матрице из SiO_2 и Al_2O_3 / Диссертация на соискание учёной степени кандидата физ.-мат. наук. Воронеж, 2003. – 148 с.

5. Koval N.N., Sochugov N.S., Devyatkov V.N., Grigoryev V.P., Arslanov I.R., Mikov A.V., Podkovyrov V.G., Kensuke Uemura. Automated power-complex for materials by electron beam // Известия вузов. Физика. – 2006. – 8. – Приложение. – С.51-54.

INVESTIGATION OF MECHANICAL PROPERTIES OF NANOSTRUCTURED COATING GRANULAR COMPOSITES $(Co_{45}Fe_{45}Zr_{10})_x(Al_2O_3)_{100-x}$

I.M. Tregubov[1)], M.Yu. Smolyakova[2)], M.A. Kashirin[1)], M.K. Dobrinin[1)], O.V. Stognei[1)]

[1)] Voronezh State Technical University,
Moskovsky av., 14, Voronezh, Russia, 394016, e-mail: ilia.tregybov@mail.ru
[2)] Belgorod State University,
Centre of nanostructural materials and nanotechnologies,
Pobedy st., 85, Belgorod, 308015, Russia.

Abstract. Thin coatings of nanogranular composites $(Co_{45}Fe_{45}Zr_{10})_x(Al_2O_3)_{100-x}$ have been investigated in the wide range of concentration ($30 \leq$ x ат. $\leq 65\%$) from the viewpoint of their mechanical properties. It has been established that maximum hardness (up to 11 GPa) is observed in composites when the concentration of metallic phase is more than 50 at. %. It has been shown that the coating of the nanogranular composite of the glass-ceramic substrate ST-50 leads to the increasing of the wear resistance. It is more than two value orders relative to pure glass-ceramic. It has been found that the dimensional wear coefficient of nanocomposites $(Co_{45}Fe_{45}Zr_{10})_x(Al_2O_3)_{100-x}$ is $0,4 \cdot 10^{-6} \div 1,3 \cdot 10^{-6}$ $mm^3N^{-1}m^{-1}$.

Key words: nanogranular composite films, wear resistance.

УДК: 621.785

РАЗРАБОТКА КОМБИНИРОВАННОГО МЕТОДА МОДИФИКАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ СТАЛИ 45

С.Ю. Филимонов[1], Ю.Ф. Иванов[2], В.Е. Громов[3], Е.А. Будовских[3]

[1] Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
пр. Ленина, 30, Томск, 634050, Россия, e-mail: ZMAN3@ya.ru
[2] Институт сильноточной электроники СО РАН,
пр. Академический 2/3, Томск, 634055, Россия.
[3] Сибирский государственный индустриальный университет,
ул. Кирова 42, Новокузнецк, 654007, Россия.

Аннотация. Анализируются результаты, полученные при исследовании образцов стали 45, подвергнутой электровзрывному легированию алюминием или медью с последующей импульсной электронно-пучковой обработкой. Выявлены режимы комбинированной обработки, кратно повышающие поверхностно-чувствительные свойства стали.

Ключевые слова: сталь 45, электровзрывное легирование, электронно-пучковая обработка, структура, поверхностно-чувствительные свойства.

1. Введение. Создание новых объёмно-легированных материалов, являющееся до сих пор основным способом повышения надёжности и долговечности деталей механизмов и машин, становится всё более проблематичным из-за дефицита и дороговизны легирующих добавок, существенно повышающих стоимость высоколегированных сплавов. В этих условиях оказывается экономически и технически целесообразно развивать принципиально иной подход к созданию материалов, при котором служебные характеристики детали обеспечиваются применением экономичных низколегированных сплавов, а специальные свойства поверхности – сплошным или локальным формированием на ней легированных слоев или нанесением покрытий, свойства которых соответствуют эксплуатационным требованиям.

Перспективным в настоящее время способом обработки поверхности металлов и сплавов, является метод электровзрывного легирования (ЭВЛ), в котором инструментом воздействия на поверхность являются импульсные плазменные струи, формируемые при разряде ёмкостных накопителей энергии через проводники. В этом случае рабочее вещество ускорителя плазмы служит как для нагрева поверхностных слоёв металлов, так и для их легирования [1]. Одновременно с легированием образца, на его поверхности практически всегда формируется покрытие, являющееся, как правило, высокопористым, содержащим большое количество капельной фракции, микрократеров и микротрещин, что существенно снижает служебные характеристики обработанной детали [1]. Для устранения данных негативных последствий нами было предложено проводить облучение поверхности ЭВЛ высокоинтенсивным электронным пучком субмиллисекундной длительности воздействия [2, 3].

Целью настоящей работы являлось установление оптимальных (с точки зрения поверхностно-чувствительных свойств) режимов электронно-пучковой обработки поверхности электровзрывного легирования стали 45.

2.Материал и методики исследования. В качестве материала подложки использовалась сталь марки Ст.45 с феррито-перлитной структурой. Электровзрывное легирование осуществлялось путём электрического взрыва алюминиевых или медных фольг толщиной 20 мкм

на установке ЭВУ 60/10. Условия для осуществления импульсного жидкофазного легирования задавались величиной зарядного напряжения накопителя энергии ускорителя, диаметром канала сопла и расстоянием от его среза до образца, которые составили соответственно 2,3 кВ, 20 и 20 мм. При этом глубина и радиус зоны легирования были максимальными. Время обработки 100 мкс, поглощаемая плотность мощности на оси струи 4,5 ГВт/м^2, давление в ударно-сжатом слое вблизи поверхности 11,2 МПа. Толщина зоны легирования в её центральной области $\sim$ 25 мкм [1]. Электронно-пучковую обработку (ЭПО) поверхности легирования осуществляли на лабораторной установке "Solo" [4, 5] при следующих основных параметрах облучения: плотность энергии пучка электронов 10-30 Дж/см^2; длительность импульса воздействия пучка 50 мкс; частота следования импульсов 0,3 Гц; число импульсов воздействия $2 \div 200$. Обработка осуществлялась в рабочей камере в атмосфере аргона при давлении $\sim 2,5\Delta 10^{-4}$ Тор. Исследования структуры поверхности облучения проводилось на растровом электронном микроскопе Quanta 600 FEG. Изменение механических характеристик материала характеризовали микротвёрдостью и износостойкостью. Микротвёрдость определяли по методу Виккерса на автоматическом микротвёрдомере DM-8 при нагрузке 0,98 Н по $80 \div 100$ отпечаткам. Испытания на износ проводили на высокотемпературном трибометре High-temperature Tribometer (CSM-Instruments), результаты испытания наблюдали с помощью профилометра.

3. Результаты исследования и их обсуждения.

3.1. Электровзрывное легирование алюминием и последующая электронно-пучковая обработка. С целью оптимизации параметров воздействия, электронно-пучковую обработку образцов осуществляли по двум режимам. Во-первых, варьировали плотность энергии пучка электронов (ES) в пределах от 10 до 30 Дж/см^2 при неизменных длительности импульса воздействия ($\tau = 50$ мкс), частоте следования импульсов (f = 0,3 Гц) и количестве импульсов воздействия (N = 10 имп.). Во-вторых, варьировали количество импульсов воздействия (N) в пределах от 2 до 200 имп. при неизменных плотности энергии пучка электронов (ES = 20 Дж/см^2), длительности импульса воздействия ($\tau = 50$ мкс) и частоте следования импульсов (f = 0,3 Гц). Первоначальный анализ режимов осуществляли, измеряя микротвёрдость поверхности. Максимальное значение микротвёрдости наблюдалось в режиме ES = 20 Дж/см^2; $\tau = 50$ мкс; f = 0,3 Гц, при 10 импульсах воздействия электронного пучка, и составило 8 ГПа, что в 4 раза превосходит микротвёрдость исходной стали.

Высокоскоростные плавление и последующее охлаждение, вызванные электронно-пучковой обработкой поверхности электровзрывного легирования, сопровождается формированием на поверхности облучения системы микротрещин, разбивающих поверхность на блоки со средними размерами D = 60 мкм (рис. 1 а). В объёме блоков наблюдается структура дендритной кристаллизации; средние размеры дендритов d = 250 нм (рис. 1 б). Как следует из анализа изображения структуры, представленной на Рис. 1 б, форма дендритов близка к равноосной. Для определения изменения износостойкости проводился тест, в ходе которого на обработанной поверхности образца делался трек. Определялась глубина и площадь трека (посредством количества вещества, унесённого в ходе теста), а по отношению этих значений для образца до и после обработки, определяли, как изменялась износостойкость материала.

Усреднённая площадь трека (количество вещества, унесённого в ходе теста) на необработанной стали составила 4070 мкм^2 (рис. 2 а), усреднённая площадь трека для стали, подвергнутой ЭВЛ алюминием и последующей ЭПО, составила 823 мкм^2 (рис. 2 б) для лучшего режима ЭПО (N = 25 импульсов, ES = 20 Дж/см^2, f = 0,3 Гц, $\tau = 50$ мкс).

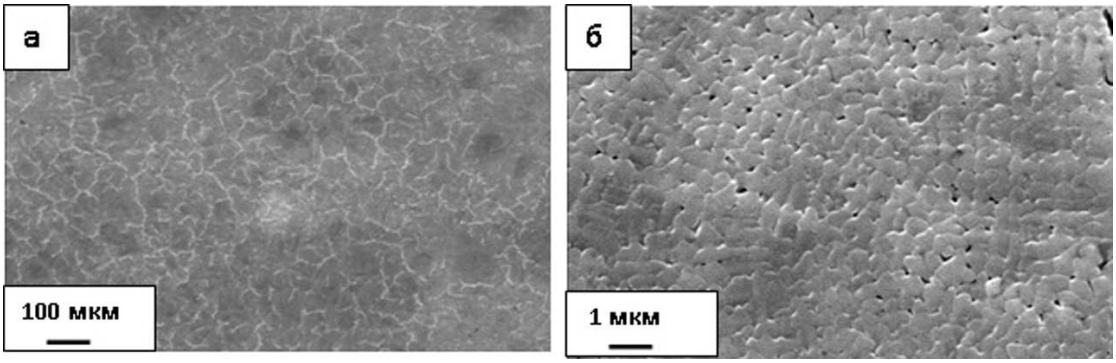


Рис. 1. Структура поверхности образца стали Ст.45 после электровзрывного легирования и последующей электронно-пучковой обработки в режиме ES = 20 Дж/см^2; τ = 50 мкс; f = 0,3 Гц, N = 10 импульсов.

Следовательно, износостойкость поверхности стали 45 после комбинированной обработки увеличивается в ~5 раз, что является весьма хорошим результатом. Одновременно с увеличением износостойкости и микротвёрдости, комбинированная обработка сопровождается существенным (более чем в 10 раз) снижением шероховатости модифицируемой поверхности. Если после ЭВЛ величина шероховатости поверхности легирования составила 3,77 мкм, то последующая ЭПО понизила степень шероховатости до 0,275 мкм.

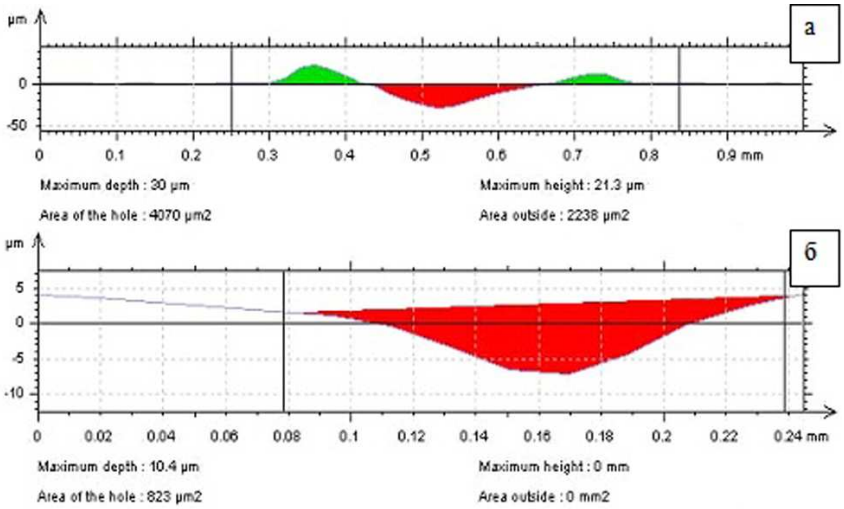


Рис. 2. Изображение, полученное в ходе измерения износостойкости: а) поверхности исходной стали 45, б) поверхности стали 45, обработанной комбинированным методом (электровзрывное легирование алюминием + высокоинтенсивное электронно-пучковое облучение).

3.2 Электровзрывное легирование стали 45 медью и последующая электронно-пучковая обработка. В результате выполненных исследований установлено, что одновременно с электровзрывным легирование медью на обрабатываемой поверхности формируется покрытие переменной толщины, содержащее большое количество микрокапель. В отдельных случаях выявляются микрократеры и микротрещины.

Наличие многочисленных микрокапель на поверхности легирования обусловлено тем, что продукты электрического взрыва металлической фольги представляют собой многофазную систему, состоящую как из металлической плазмы, так и микрокапельной фракции. Электронно-пучковая обработка, не изменяя элементный состав материала, позволяет преимущественно, путём высокоинтенсивного термического воздействия, осуществить скоростную гомогенизацию поверхностного слоя.

В результате выполненных исследований установлено, что плавление поверхностного слоя образца (слоя, подвергнутого электровзрывному легированию) фиксируется при плотности энергии пучка электронов ES ~15 Дж/см^2. Это приводит, с одной стороны, к удалению микротрещин, микрократеров и наплывов меди, с другой стороны, к формированию некоторого количества капель меди сферической формы, размеры которых изменяются в пределах единиц микрометров.

Высокоскоростная кристаллизация расплава сопровождается формированием дендритной структуры. Установлено, что строение дендритов зависит от плотности энергии пучка электронов. При обработке стали электронным пучком с плотностью энергии пучка электронов 15÷20 Дж/см^2 преимущественно формируется дендритная структура с осями первого порядка (на поверхности облучения наблюдается так называемая структура ячеистой кристаллизации) (рис. 3 а); при бóльшей плотности энергии пучка электронов дендриты имеют оси первого и второго порядка (рис. 3 б). Очевидно, что строение дендритной структуры определяется скоростью охлаждения расплава.

Исследования микротвёрдости поверхности стали 45 после комбинированной обработки позволили выявить оптимальный режиме (τ = 50 мкс; f = 0,3 Гц, N =10 импульсов, ES = Дж/см^2), при котором микротвёрдость поверхности достигает ~ 12 ГПа, что в ~6 раз превышает микротвёрдость исходной стали 45.

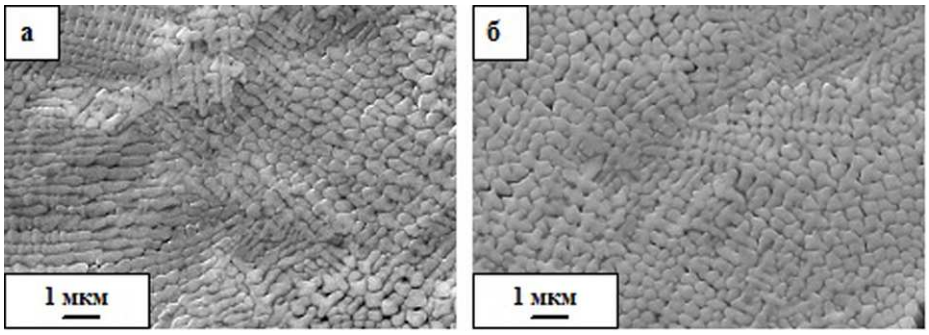


Рис. 3. Изображение структуры дендритной кристаллизации стали 45, подвергнутой электровзрывному легированию и последующей электронно-пучковой обработке при ES = 20 Дж/см^2 (а) и ES = 30 Дж/см^2 (б).

Износостойкость поверхности комбинированной обработки измерялась также как и в предыдущем разделе. Усреднённая площадь трека для стали, подвергнутой ЭВЛ медью и последующей ЭПО составила 855 мкм^2 (рис. 4) при лучшем режиме ЭПО (N = 5 импульсов, E = 30 Дж/см^2, f = 0,3 Гц, τ=50 мкс). Следовательно, износостойкость после обработки

увеличивается в ∼ 5 раз, что очень близко к результатам, полученным для ЭВЛ алюминием и последующей ЭПО. Величина шероховатости образцов стали 45 после ЭВЛ составляла 3,77 мкм, после электронно-пучковой обработки 1,1 мкм. Следовательно, и в данном случае наблюдается эффект выглаживания поверхности комбинированной обработки.

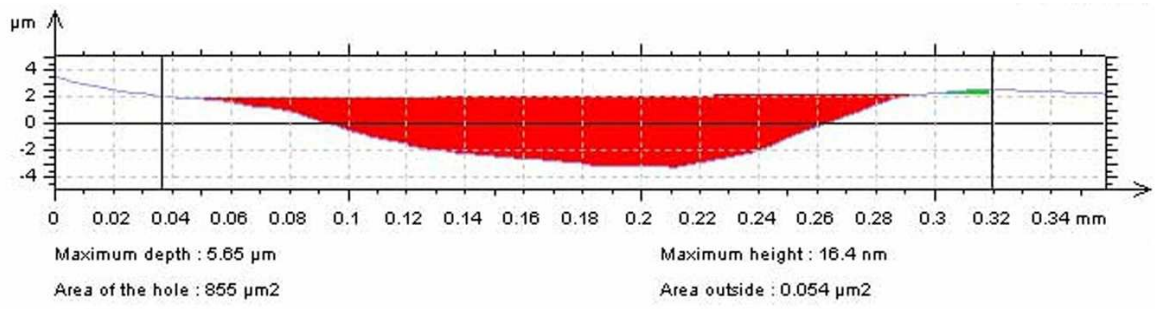


Рис. 4. Изображение, полученное в ходе измерения износостойкости поверхности стали 45, обработанной комбинированным методом (ЭВЛ медью + ЭПО).

4. Заключение. Выполнена комбинированная обработка стали 45, заключающаяся в электровзрывном легировании поверхности алюминием или медью и последующем облучении высокоинтенсивным электронным пучком. Проведены исследования структуры и поверхностно-чувствительных свойств (микротвёрдость, износостойкость, шероховатость). Выполнен анализ полученных результатов. Установлено, что:

1) ЭПО поверхности стали 45 сопровождается кратным снижением степени шероховатости как после электровзрывного алитирования, так и после электровзрывного меднения;

2) комбинированная обработка поверхности стали 45, включающая электровзрывное алитирование и последующую электронно-пучковую обработку, в оптимальном режиме сопровождается ростом микротвёрдости (в ∼4 раза) и износостойкости (в ∼5 раз);

3) комбинированная обработка поверхности стали 45, включающая электровзрывное меднение и последующую электронно-пучковую обработку, в оптимальном режиме сопровождается ростом микротвёрдости (в ∼6 раза) и износостойкости (в ∼5 раз).

Работа выполнена в рамках государственного контракта № 14.740.11.0986 "Проведение поисковых научно-исследовательских работ в целях развития общероссийской мобильности в области технических и инженерных наук" по теме: "Новые функциональные материалы и покрытия для энергетики и двигателестроения" на базе НОиИЦ "Наноструктурные материалы и нанотехнологии" с использованием аналитического оборудования Центра коллективного пользования "Диагностика структуры и свойств наноматериалов" НИУ БелГУ.

Литература

1. Багаутдинов А.Я., Будовских Е.А., Иванов Ю.Ф., Громов В.Е. Физические основы электровзрывного легирования металлов и сплавов / А.Я. Багаутдинов. – Новокузнецк: Изд-во СибГИУ, 2007. – 301 с.

2. Иванов Ю.Ф., Карпий С.В., Морозов М.М., Коваль Н.Н., Будовских Е.А., Громов В.Е. Структура, фазовый состав и свойства титана после электровзрывного легирования и электронно-пучковой обработки / Ю.Ф. Иванов. – Новокузнецк: Изд-во НПК, 2010. – 173 с.

3. Формирование структурно-фазовых состояний металлов и сплавов при электровзрывном легировании и электронно-пучковой обработке / Е.А. Будовских, Е.С. Ващук, В.Е. Громов, Ю.Ф. Иванов, Н.Н. Коваль, С.Ю. Филимонов / Под ред. В.Е. Громова. – Новокузнецк: Изд-во "Интер-Кузбасс 2011. – 212 с.

4. Иванов Ю.Ф., Коваль Н.Н. Низкоэнергетические электронные пучки субмиллисекундной длительности: получение и некоторые аспекты применения в области материаловедения / Гл.13 в книге "Структура и свойства перспективных металлических материалов". – С.345-382 / Под ред. А.И. Потекаева. – Томск: Изд-во НТЛ, 2007. – 580 с.

5. Koval N.N., Sochugov N.S., Devyatkov V.N. Grigoryev V.P., Arslanov I.R., Mikov A.V., Podkovyrov V.G., Kensuke Uemura. Automated power-complex for materials by electron beam // Известия вузов. Физика. – 2006. – 8. – Приложение. – С.51-54.

DEVELOPMENT OF A COMBINED METHOD OF STEEL 45 SURFACE MODIFICATION

S.Yu. Filimonov[1)], **Yu.F. Ivanov**[2)], **V.E. Gromov**[3)], **E.A. Budovskih**[3)]

[1)] National Research Tomsk Polytechnic University,
Lenina av., 30, Tomsk, 634050, Russia, e-mail: ZMAN3@ya.ru
[2)] Institute of High Current Electronics SB RAS,
Akademichesky av., 2/3, Tomsk, 634055, Russia.
[3)] Siberian State Industrial University,
Kirova st., 42, Novokuzneck, 654007, Russia.

Abstract. Results obtained at the research of steel 45 samples are analyzed when they are submitted to the electroexplosive doping of aluminum or copper with the following pulse electron beam treatment. Regimes of combined treatment which give a multiple increment of steel surface-sensitive properties are revealed.

Key words: steel 45, electroexplosive doping, electron-beam treatment, structure, surface-sensitive properties.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Антонова Е.С. – аспирант Белгородского государственного университета

Ахмадеев Ю.Х. – кандидат технических наук, научный сотрудник Лаборатории плазменной эмиссионной электроники Института сильноточной электроники Сибирского отделения РАН

Будовских Е.А. – доктор технических наук, профессор кафедры физики Сибирского государственного индустриального университета, г.Новокузнецк.

Виноградов А.В. – инженер-технолог ОАО «Корпорация МИТ» «МАТИ» – Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского

Вирченко Ю.П. – доктор физико-математических наук, зав. кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного университета

Гандель Ю.В. – доктор физико-математических наук, профессор Харьковского национального университета

Гриднев С.А. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики твёрдого тела Воронежского государственного технического университета

Гриняев К.В. – аспирант Томского государственного университета

Гриценко С.А. – доктор физико-математических наук, зав. кафедры алгебры, геометрии и теории чисел Белгородского государственного университета

Громов В.Е. – доктор физико-математических наук, зав. кафедры физики Сибирского государственного индустриального университета, г.Новокузнецк

Дитенберг И.А. – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН

Добрынин М.К. – студент Воронежского государственного технического университета

Душкин В.Д. – кандидат физико-математических наук, профессор Академии внутренних войск МВД Украины (г.Харьков)

Желтухин А.В. – инженер-технолог ОАО «Корпорация МИТ»

Желтухин Р.В. – старший преподаватель ГОУ ВПО «МАТИ» – Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского

Журавлёв М.В. – аспирант Воронежского государственного университета

Зимин Р.Н. – аспирант Белгородского государственного университета

Иванов Ю.Ф. – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаб. плазменной эмиссионной электроники Института сильноточной электроники, г.Томск

Калгин А.В. – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Воронежского государственного технического университета

Коротаев А.Д. – доктор физико-математических наук, профессор Томского государственного университета

Каширин М.А. – аспирант Воронежского государственного технического университета

Куртова Л.Н. ассистент Белгородского государственного университета

Лопатин И.В. – младший научный сотрудник Лаборатории плазменной эмиссионной электроники Института сильноточной электроники Сибирского отделения РАН

Мазманишвили А.С. – доктор физико-математических наук, профессор Сумского государственного университета (г.Сумы, Украина)

Мейрманов А.М. – доктор физико-математических наук, зав. кафедры прикладной математики Белгородского государственного университета

Мошков В.Ю. – кандидат физико-математических наук, инженер ОСП «Сибирский физико-технический институт им. акад. В.Д.Кузнецова» Томского государственного университета

Некрасова И.В. – аспирант Белгородского государственного университета

Овчинников С.В. – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН

Покорный Ю.В. – доктор физико-математических наук, профессор Воронежского государственного университета

Половинкин И.В. – кандидат физико-математических наук, доцент Воронежского государственного университета

Полунин В.А. – аспирант Белгородского государственного университета

Рябцева Н.Н. – ассистент Белгородского университета потребительской кооперации

Солдатов А.П. – доктор физико-математических наук, зав.кафедры математического анализа Белгородского государственного университета

Скороход А.В. – ассистент Поволжской государственной социально-гуманитарной академии (г.Самара)

Смолякова М.Ю. – младший научный сотрудник, Белгородский государственный университет, Научно-образовательный и инновационный Центр «Наноструктурные материалы и нанотехнологии», г.Белгород

Стогней О.В. – доктор физико-математических наук, профессор Воронежского государственного технического университета

Трегубов И.М. – аспирант Воронежского государственного технического университета

Тюменцев А.Н. – доктор физико-матемаических наук, зав. лабораторией Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН

Филимонов С.Ю. – ведущий инженер НОИЦ «Наноматериалы и нанотехнологии» ИФВТ, ТПУ

Шевцова М.В. – аспирант Белгородского государственного университета

Эпельфельд А.В. – профессор, доктор технических наук «МАТИ» – Российский государственный технологический университет им. К.Э.Циолковского

Юнусова Г.Р. – аспирант Самарского государственного архитектурно-строительного университета

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика» выходит четыре раза в год. Два выпуска журнала посвящены чисто математическим работам и два – работам по физике и прикладной математике.

Редколлегия журнала принимает от авторов рукописи статей, написанные на русском или на английском языках, по различным разделам математики и физики. Содержание статей может содержать как результаты оригинальных исследований автора (ов), так и представлять собой обзор по выбранной автором (ами) теме.

Статья должна быть написана с достаточной степенью подробности и с таким расчётом, чтобы быть понятной не только узким специалистам по выбранному автором (ами) направлению исследований, но более широкому кругу математиков и(или) физиков. Ни в коем случае рукопись не должна представлять собой краткий отчёт о проведенных исследованиях, написанный в виде краткого сообщения, не содержащий описания постановки задачи (условий проведения эксперимента, если это экспериментальная работа по физике). В связи с этим, рукопись должна быть структурирована — разделена на разделы, представляющие отдельные смысловые единицы текста. В любом случае, рукопись должна содержать введение и заключение. Разделы должны быть пронумерованы и иметь заголовки.

Во введении должны быть описаны: проблема, которой посвящена рукопись, определено место этой проблемы в общем объёме физико-математического знания, представлены краткая история вопроса и полученный автором (ами) результат. В заключении работы должна быть дана характеристика полученного результата с указанием его значения для дальнейшего развития темы исследования.

Те же самые требования к введению и заключению предъявляются и для обзорной статьи, с той лишь разницей, что их содержание должно быть посвящено описанию всей совокупности результатов, отражающих состояние выбранной автором области исследований, и сам текст должен быть написан с большей степенью подробности.

Возможна также публикация статьи, носящей методический характер. Но в этом случае решение о возможности публикации такой рукописи принимается редколлегией отдельно.

Рукопись должна быть оформлена в соответствии с традициями написания, соответственно, математических и физических текстов. В частности, в математических текстах должны быть чётко выделены такие структурные единицы, как формулировки определений, теорем и лемм, следствий и замечаний, отмечены начала и окончания доказательств.

Полный объём рукописи, которая представляет собой оригинальное исследование, не должен превышать 20 страниц формата А4. Она должна быть написана шрифтом 14pt через два интервала. Объём обзорной статьи необходимо заранее оговорить с редколлегией журнала.

После подготовки одним из членов редколлегии заключения о соответствии рукописи нормам журнала "Научные ведомости"она рассматривается на общем собрании редколлегии. В отдельных случаях редколлегией может быть принято решение о более

тщательном изучении рукописи внешним (не входящем в состав редколлегии журнала) рецензентом. Редколлегия оставляет за собой право на мелкие стилистические исправления текста рукописи после принятия решения о её публикации.

В редакцию присылаются следующие файлы:

1) основная содержательная часть, представляемая на русском или английском языках. При этом название статьи должно состоять не более чем из 20 слов.

2) номер УДК того научного направления, которому посвящена статья;

3) список авторов с указанием порядка их размещения при публикации статьи;

4) аннотация на русском языке; её объём не должен превышать 10-12 строк, написанных шрифтом 12pt;

5) список ключевых слов (не более 10-12);

6) текст перевода заголовка статьи, аннотации и ключевых слов на английском языке;

7) список литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте рукописи;

8) данные об авторах статьи с указанием места их работы, точного почтового адреса и занимаемой должности. Должны быть указаны адреса электронной почты. Эти данные необходимо представить также на английском языке. Кроме того, должна быть дана латинская транскрипция фамилий авторов. Соответственно, для статей на английском языке должна быть дана транскрипция фамилий авторов кириллицей;

9) списка подписей к рисункам, если они имеются в рукописи.

В редакцию присылается электронный вариант рукописи. Он должен быть подготовлен в редакторе LaTeX (LaTeX2e, AMSLaTeX). При этом нужно также прислать файл с pdf-копией рукописи для того, чтобы редакция имела возможность сравнения его с авторским оригиналом при редактировании.

Особое внимание должно быть уделено рисункам, если они имеются в рукописи. Они должны быть качественно оформлены и приготовлены в виде отдельных электронных файлов в формате "ps"(можно также присылать файлы рисунков в формате "eps но при этом нужно проследить, чтобы они были приготовлены в "векторном формате то есть так, чтобы их можно было транслировать в формат "ps"). Файлы рисунков необходимо пронумеровать в соответствии со списком подписей к рисункам (см. п.7).

Внимание!

1. На представляемых в электронном формате рисунках не следует наносить те комментирующие их подписи, которые присылаются в редколлегию отдельным списком.

2. Если в тексте работы есть таблицы, то их следует формировать на основе программы LaTeX и ни в коем случае не оформлять в виде рисунков.

Обращаем внимание авторов на то, что список литературы должен быть оформлен строго в соответствии с существующим ГОСТом. При этом нужно обратить особое внимание на то, чтобы были указаны полные названия журнальных статей и статей в сборниках, на которые есть ссылки в тексте рукописи, а также указаны не только начальные страницы этих статей, но обязательно также и конечные. Каждая из монографий в списке цитируемой литературы обязательно должна быть дана с указанием полного числа страниц.

Особые требования к электронному набору в редакторе LaTeX (LaTeX, AMS LaTeX) следующие:

1) нельзя использовать вводимые авторами новые нестандартные команды;

2) выключные формулы должны быть пронумерованы в порядке их появления в рукописи в том случае, если на них есть ссылки в тексте. При использовании режима equation для набора выключных формул обязательно употребление для их нумерации соответствующих номеров формул в тексте. Допускается применение для меток формул цифр, снабжённых штрихами (или цифр совместно с буквами латинского алфавита). Однако этим нужно пользоваться только в случае крайней необходимости с целью более точной передачи смысла текста;

3) в случае, если в статье имеются разделы в виде *приложений* в конце основного текста работы, нумерация содержащихся в них выключных формул может быть независимой от нумерации основного текста. При этом в приложениях рекомендуется употребление двойной нумерации, в которой первый символ может быть прописной буквой или номером приложнения. Каждый из разделов-приложений начинается словом ПРИЛОЖЕНИЕ с порядковым номером этого приложения. Это слово должно быть выровнено по правому полю страницы. Затем следует заголовок этого приложения;

4) литературные источники в ссылках на основе команд ref или cite в электронном тексте рукописи нужно обозначать цифрами, соответствующими их порядковому номеру появления в тексте, и ни в коем случае не использовать метки другого типа.